Université des Sciences et Technologies de Lille

Université de Lens et d'Artois

Université du Littoral Côte d'Opale

Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis

D.E.A. de Mathématiques Pures

http ://www.univ-lille1.fr/math/Formations/deaMP.htm

Mémoire de D.E.A. intitulé

Sur les méthodes de transcendance

présenté par

A. Emin TATAR

soutenu en juin 2004

Directeur de mémoire : Mohammed ABLY
Laboratoire Paul Painlevé U.M.R. CNRS 8524
Université des Sciences et Technologies de Lille

Ailem'e

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Théorème de Lindemann-Weierstrass **5**
2.1 Définitions et Notations 5
2.2 L'approximation de e 8
2.3 Théorème de Hermite 9
2.4 Théorème de Lindemann-Weierstrass 11

3 Théorème de Gel'Fond-Schneider **15**
3.1 Préliminaires 16
3.1.1 Lemme de Schwarz 16
3.1.2 Lemme de Siegel 17
3.2 Méthode de Gel'Fond 19
3.3 Méthode de Schneider 23
3.4 Application 27
3.5 Comparaison des deux méthodes 31

4 Théorème de Baker **33**
4.1 Le Lemme de Zéros 33
4.2 Théorème de Baker 36
4.3 Application 39

5 Conclusion **41**

1 Introduction

C'est en 1844, dans son mémoire que Liouville a établi les fondements de la théorie des nombres transcendants. En effet, il a obtenu une classe de nombres qui ne vérifie aucune équation polynômial à coefficients entiers. A cette époque, bien que e et π soient connues comme étant irrationnels, ils ne font pas encore partie de la catégorie établit par Liouville. C'est Hermite en 1873 qui a démontré que e est un nombre transcendant. Quant à la transcendance de π, elle est démontré en 1882 par Lindemann en généralisant la méthode d'Hermite. La même année, il esquisse la démonstration de l'indépendance algébrique d'une famille d'exponentielles $e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_n}$ pour $\alpha_1, ..., \alpha_n$ algébriques linéairements independents sur $\mathbb{Q}$.

Le concept de dénombrabilité introduit par Cantor nous dit que presque tous les nombres au sens de Lebesgue sont transcendants bien qu'on ne connaisse pas le statut de beaucoup de nombres. Le 7ième problème de Hilbert posé en 1900 au congrès de Paris s'intéresse à la transcendance de α^β avec $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 1$, β irrationnel et α, β algébrique. Deux démonstrations faites indépendamment l'une de l'autre par Gel'fond et Schneider en 1934 prouvent la transcendance de cette famille de nombres.

En 1966, Baker a établit la généralisation du théorème de Gel'fond-Schneider en utilisant la méthode de Gel'fond. Cette généralisation a permis d'obtenir l'aspect approximation diophantinienne qui s'appliquent dans des domaines très variés de la théorie des nombres.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons plus particulièrement a trois méthodes fondamentales qui permettent de déterminer certains nombres transcendants : la méthode de Gel'fond, la méthode de Schneider et la méthode de Baker. Les démonstrations sont détaillées dans l'ordre chronologique.

Le mémoire est organisé de la manière suivante :

Tout d'abord, on commence par le théorème de Lindemann-Weierstrass, qui nous donne l'indépendance algébrique des valeurs de fonctions exponentielles (chapitre 2).

Le chapitre 3 débute par un rappel de quelques notions d'analyse complexe et la démonstration du lemme de Schwarz et de Siegel qui sont utilisés ensuite dans la démonstration de la méthode de Gel'fond et la méthode de Schneider auxquelles est consacré la suite du chapitre.

Enfin, on peut trouver au chapitre 4 le lemme de zéros de Gel'fond qui est utilisé pour la démonstration du théorème de Baker.

2 Théorème de Lindemann-Weierstrass

2.1 Définitions et Notations

Définition 1. *Un corps de nombres K est une extension finie de $\mathbb{Q}$.*

Définition 2. *Soit K un corps de nombres et $\alpha \in K$.*
α est appelé entier algébrique si l'une de propriétés suivantes est vérifiée :

1. *$\exists P \in \mathbb{Z}[\mathbb{X}] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$.*
2. *Il existe un $\mathbb{Z}$ module M de type fini, non nul, contenu dans K tel que $\alpha M \subset M$.*

Remarque 1.
1. *On note I_K l'ensemble des entiers algébriques de K.*
2. *Grâce à (2) on déduit immédiatement que I_K est un anneau appelé anneau des entiers algébriques.*
3. *Soit $\alpha \in K$. On note par $den(\alpha)$ le dénominateur de α. Alors il est clair que $den(\alpha)\alpha \in I_K$. En fait, supposons que*

$$a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + ... + a_0 = 0$$

avec $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $i = 1...m$.
En multipliant par a_m^{m-1}, on obtient

$$(a_m\alpha)^m + a_{m-1}(a_m\alpha)^{m-1} + ... + a_m^{m-1}a_0 = 0$$

Par (2), $a_m\alpha \in I_K$ ce qui implique $den\alpha | a_m$.
Donc, $den(\alpha)\alpha \in I_K$.

4. *De plus, on voit que $\forall \alpha \in K$ s'écrit $\frac{a}{b}$ avec $a \in I_K$ et $b \in \mathbb{Z}$.*

Définition 3. *Soit K un corps de nombres et α , $\beta \in K$.*
On dit que α et β sont conjugués s'il existe un $\mathbb{Q}$-morphisme $\Psi : \mathbb{Q}[\alpha] \mapsto \mathbb{Q}[\beta]$ tel que $\Psi(\alpha) = \beta$.

Proposition 1. *α et β sont conjugués si et seulement si ils ont le même polynôme minimal.*

Démonstration:
$\Rightarrow$ Soient α et β deux conjugués.
Alors il existe un $\mathbb{Q}$-morphisme $\Psi : \mathbb{Q}[\alpha] \mapsto \mathbb{Q}[\beta]$ tel que $\Psi(\alpha) = \beta$.
Supposons que P soit le polynôme minimal de α alors $P(\alpha) = 0$.
On veut montrer que $P(\beta) = P(\Psi(\alpha)) = 0$.

$$0 = \Psi(P(\alpha)) = \Psi(\sum_{k=0}^{n} a_k\alpha^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\Psi(\alpha))^k = P(\Psi(\alpha)) = P(\beta)$$

Donc P est le polynôme minimal de β.

$\Leftarrow$ Si α et β ont le même polynôme minimal P, alors

$$\mathbb{Q}[\alpha] \backsimeq \mathbb{Q}[\mathbb{X}]/(P) \text{ et } \mathbb{Q}[\beta] \backsimeq \mathbb{Q}[\mathbb{X}]/(P)$$

Autrement dit, il existe deux isomorphismes

$$\varphi : \mathbb{Q}[\alpha] \mapsto \mathbb{Q}[\mathbb{X}]/(P) \text{ et } \chi : \mathbb{Q}[\beta] \mapsto \mathbb{Q}[\mathbb{X}]/(P)$$

En prenant $\Psi = \varphi \circ (\chi)^{-1}$, on a la conclusion.

□

Remarque 2. *Par cette propriété, on peut dire que tout $\alpha \in K$ admet n conjugués où $n = degP = [K : \mathbb{Q}]$. Pour chaque injection $\sigma : K \mapsto \mathbb{C}$, $\sigma(\alpha)$ est un conjugué de α.*

Notation 1. $||\alpha|| = max_{i=1..n}(|\sigma_i(\alpha)|)$ *où $\alpha \in K$ et σ_i injection de K dans $\mathbb{C}$.*

Définition 4. *Soit $\alpha \in K$, $den(\alpha)$ son dénominateur et $\sigma(\alpha)$ un des ses conjugués. On appelle taille de α le nombre réel positif $t(\alpha) = max(\log(den(\alpha)), log(||\alpha||))$.*

Remarque 3. $\forall r > 0 \; t(\alpha^r) \leq rt(\alpha)$

Définition 5. *Soit K un corps de nombres tel que $[K : \mathbb{Q}] = n$ et $\alpha \in K$.*
On note par σ_i $(i = 1..n)$ les injections de K dans $\mathbb{C}$ où $\sigma_i(\alpha)$ est un conjugué de α.
On définit la norme de α et la trace de α :

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha)$$

$$T_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha)$$

Lemme 1 (Inégalité de Taille). *Soit K un corps de nombres tel que $[K : \mathbb{Q}] = n$ et $\alpha \in K$ non nul alors on a $-nlog(den(\alpha)) - (n-1)t(\alpha) \leq log|\alpha|$.*

Remarque 4. *On utilise ce lemme souvent sous la forme $-2nt(\alpha) \leq \log|\alpha|$.*

Démonstration: Soit $\alpha \in K$ et $\sigma_i(\alpha)$ pour $i = 1..n$ les n conjugués de α. Alors

$$1 \leq |N_{K/\mathbb{Q}}(den(\alpha)\alpha)| \leq \prod_{i=1}^{n} |\sigma_i(den(\alpha))\alpha| = (den(\alpha))^n \prod_{i=1}^{n} |\sigma_i(\alpha)|$$

Il existe $i_0 \in \{1..n\}$ tel que $\sigma_{i_0}(\alpha) = \alpha$, alors :

$$1 \leq (den(\alpha))^n |\alpha| \prod_{i=1, i \neq i_0}^{n} |\sigma_i(\alpha)| \Rightarrow 0 \leq nlog(den(\alpha)) + \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n} log|\sigma_i(\alpha)| + log|\alpha|$$

Comme $log|\sigma_i(\alpha)| \leq t(\alpha)$, on a $-nlog(den(\alpha)) - (n-1)t(\alpha) \leq log|\alpha|$. □

Théorème 1 (Estimation de Liouville). *Soit α un nombre algébrique de degré $n > 1$, alors il existe $c = c(\alpha)$ tel que*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^n}, \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ et } q \neq 0$$

Démonstration: Comme α est algébrique de degré $n > 1$, il existe un polynôme irréductible $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n tel que $P(\alpha) = 0$. Par le théorème d'accroissements finis, on a :

$$-P(\frac{p}{q}) = P(\alpha) - P(\frac{p}{q}) = P'(\zeta)(\alpha - \frac{p}{q})$$

où $\zeta \in]\alpha, \frac{p}{q}[$.
Si $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq 1$, en prenant $c = 1$ et $q \neq 1$ on a la solution.
Supposons donc $|\alpha - \frac{p}{q}| < 1$. Alors $|\zeta| < 1 + |\alpha|$, d'où $|P'(\zeta)| < \frac{1}{c}$ avec $c = c(\alpha)$ et on obtient,

$$|P(\frac{p}{q})| < \frac{1}{c}|\alpha - \frac{p}{q}| \Rightarrow c|P(\frac{p}{q})| < |\alpha - \frac{p}{q}|$$

Comme P est irréductible, $P(\frac{p}{q}) \neq 0$. De plus, comme P est de degré n, $q^n P(\frac{p}{q}) \in \mathbb{N}$. D'où,

$$cq^n|P(\frac{p}{q})| < q^n|\alpha - \frac{p}{q}| \Rightarrow c < q^n|\alpha - \frac{p}{q}|$$

d'où la conclusion. □

D'après ce théorème, on peut dire que ;

Corollaire 1. *Le nombre $\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$ est transcendant.*

Démonstration: Supposons par l'absurde que, ρ est algébrique de degré n.
On pose $\frac{x}{y} = \sum_{i=1}^{n+t-1} \frac{1}{2^{i!}}$ alors $y = 2^{(n+t-1)!}$

$$|\rho - \frac{x}{y}| = |\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i!}} - \sum_{i=1}^{n+t-1} \frac{1}{2^{i!}}| = |\sum_{i=n+t}^{\infty} \frac{1}{2^{i!}}| = \frac{1}{2^{(n+t)!}}(1 + \frac{1}{2^{(n+t+1)}} + ... + ...)$$

$$\Rightarrow |\rho - \frac{x}{y}| \leq \frac{1}{2^{(n+t)!}}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}) = \frac{2}{2^{(n+t)!}} < \frac{2}{y^{n+t}} < \frac{2}{y^n}$$

Alors ρ ne vérifie pas l'estimation de Liouville, donc ρ est transcendant. □

Grâce à cette estimation, Liouville a établit une classe des nombres transcendants que l'on appelle nombre de Liouville. Ces nombres sont ceux qui ne vérifient pas l'estimation de Liouville. Mais cette estimation est insuffisante pour déterminer si e ou Π est transcendant ou non. La transcendance de e et Π sont démontré par le théorème de Weierestrass-Lindemann. Ce théorème est une généralisation du théorème de Hermite qui prouve pour la première fois en 1873 la transcendance de e.

Avant de passer aux démonstrations des théorèmes de Hermite et Lindemann-Weierstrass, nous voulons donner une méthode qui a été constituée par Hermite et qui permet de faire une approximation de la fonction exp par une fraction rationnelle. Cette méthode fournit la base des preuves de ces deux théorèmes. Nous allons voir que les deux preuves commencent par appliquer directement cette méthode et aboutissent à une contradiction.

2.2 L'approximation de e

On veut approcher n fonctions $e^{a_1 x}, ..., e^{a_n x}$ par des fractions rationnelles $\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, ..., \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$ (respectivement) tel que jusqu'à la puissance M, ils coïncident. Pour cela, on considère,

$$f(z) = z^{\mu}(z-a_1)^{\mu_1}(z-a_2)^{\mu_2}...(z-a_n)^{\mu_n}$$

tel que $\mu + \sum_{i=1}^{n} \mu_i = M$ et $M - m = \mu$.
On envisage aussi les n intégrales

$$\int_0^{a_1} e^{-zx} f(z)dz, \int_0^{a_2} e^{-zx} f(z)dz, ..., \int_0^{a_n} e^{-zx} f(z)dz$$

On pose

$$F(z) = \frac{f(z)}{x} + \frac{f'(z)}{x^2} + ... + \frac{f^{(M)}(z)}{x^{M+1}} \tag{1}$$

Alors, quand on calcule $(e^{-zx}F(z))'$, on voit que $(e^{-zx}F(z))' = -e^{-zx}f(z)$ et par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{a_1} e^{-zx} f(z)dz = F(0) - e^{-a_1 x}F(a_1)\\
&\int_0^{a_2} e^{-zx} f(z)dz = F(0) - e^{-a_2 x}F(a_2)\\
&....\\
&\int_0^{a_n} e^{-zx} f(z)dz = F(0) - e^{-a_n x}F(a_n)
\end{aligned}$$

Par (1), on peut facilement calculer les expressions de $F(0), F(a_1), ..., F(a_n)$.

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k = 0, ..., \mu - 1 \Rightarrow F(0) = \frac{f^{(\mu)}(0)}{x^{\mu+1}} + ... + \frac{f^{(M)}(0)}{x^{M+1}}$$

$$\Rightarrow F(0) = \frac{x^{M-\mu}f^{(\mu)}(0) + ... + f^{(M)}(0)}{x^{M+1}} = \frac{\Phi(x)}{x^{M+1}} \text{ avec } \Phi \text{ polynôme de degré } M - \mu = m.$$

De même, $F(a_i) = \frac{\Phi_i(x)}{x^{M+1}}$ avec Φ_i un polynôme de degré $M - \mu_i$. D'où les n intégrales deviennent

$$\int_0^{a_1} e^{-zx} f(z)dz = \frac{\Phi(x)}{x^{M+1}} - e^{-a_1 x}\frac{\Phi_1(x)}{x^{M+1}}$$
$$\int_0^{a_2} e^{-zx} f(z)dz = \frac{\Phi(x)}{x^{M+1}} - e^{-a_2 x}\frac{\Phi_2(x)}{x^{M+1}}$$
$$....$$
$$\int_0^{a_n} e^{-zx} f(z)dz = \frac{\Phi(x)}{x^{M+1}} - e^{-a_n x}\frac{\Phi_n(x)}{x^{M+1}}$$
$$\Rightarrow e^{a_1 x} = \frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)} + x^{M+1}\frac{e^{a_1 x}\int_0^{a_1} e^{-zx} f(z)dz}{\Phi(x)}$$
$$.....$$
$$e^{a_n x} = \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)} + x^{M+1}\frac{e^{a_n x}\int_0^{a_n} e^{-zx} f(z)dz}{\Phi(x)}$$

Les termes $e^{a_i x}\int_0^{a_i} e^{-zx} f(z)dz (i = 1...n)$ sont dévelopables en series entiers donc $\frac{\Phi_i(x)}{\Phi(x)}$ et $e^{a_i x}$ se coïncident jusqu'à l'ordre $M + 1$.

2.3 Théorème de Hermite

Théorème 2. *e est transcendant.*

Démonstration: Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ tel que $deg(f) = r$.
On définit

$$F(x) = \sum_{k=0}^{r} f^{(k)}(x) = f(x) + f^{(1)}(x) + ... + f^{(r)}(x)$$

On remarque que

$$(e^{-x}F(x))' = -e^{-x}F(x) + e^{-x}F'(x) = e^{-x}(F'(x) - F(x)) = e^{-x}f(x)$$

On applique le Théorème des Accroissements Finis à $e^{-x}F(x)$ sur $[0, k]$ alors

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -ke^{-\theta_k k}f(k\theta_k) \text{ où } \theta_k \in \sqsupset 0, 1 \sqsubset \tag{2}$$

En multipliant cette équation par e^k, on obtient

$$F(k) - e^k F(0) = -ke^{(1-\theta_k)k}f(k\theta_k)$$

donc on définit

$$\epsilon_i = F(i) - e^i F(0), \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{3}$$

Supposons par l'absurde que e est algébrique de degré n alors $\exists a_0, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a_0 + a_1 e + ... + a_n e^n = 0$$

Multiplions ϵ_i par a_i pour tout i et faisons l'addition

$$\begin{aligned} &a_0\epsilon_0 + ... + a_n\epsilon_n = a_0F(0) + a_1F(1) + ... + a_nF(n) - F(0)(a_0 + a_1e + ... + a_ne^n) \\ \Rightarrow &a_0F(0) + ... + a_nF(n) = a_0\epsilon_0 + ...a_n\epsilon_n \end{aligned}$$

Jusqu'à ici, les calculs étaient indépendants de f. Maintenant, on prend f égale

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{i=1}^{n}(i-x)^p$$

avec $deg(f) = p(n+1) - 1$.
Si $j < p$, $f^{(j)}(i) = 0$ pour $i \in \{1, ..., n\}$.
Si $j \geq p$, $f^{(j)}(i)$ est divisible par p pour $i \in \{0, ..., n\}$.
Pour $j = p-1$ et $i = 0$ on voit que $f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ et pour $p > n$ $p \nmid f^{(p-1)}(0)$. D'où

$$F(i) = \sum_{j=p}^{p(n+1)-1} f^{(j)}(i) \text{ est divisible par p.} \quad \forall i \neq 0$$

$$F(0) = \sum_{j=p-1}^{p(n+1)-1} f^{(j)}(0) \text{ n'est pas divisible par p.}$$

Finalement, $\sum_{i=0}^{n} a_iF(i)$ n'est pas divisible par p si $p > a_i$.
D'autre part, par (2) et (3), on a

$$\forall i \in \{0, ..., n\} \quad \epsilon_i = -ie^{(1-\theta_i)i}\frac{i^{p-1}\theta_i^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{j=1}^{n}(j - i\theta_i)^p$$

mais comme $\forall j \in \{1, ..., n\}$, on a $|j - i\theta_i| \leq j$

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{n}(j - i\theta_i)^p \leq \prod_{j=1}^{n} j^p \leq (n!)^p \\ &\Rightarrow |\epsilon_i| \leq \frac{n^pe^n}{(p-1)!}(n!)^p \Rightarrow \forall i \in \{0, ..., n\} |\epsilon_i| \to 0 \text{ quand } p \to \infty \\ &\Rightarrow |a_0\epsilon_0 + ... + a_n\epsilon_n| \leq \sum_{i=0}^{n}|a_i||\epsilon_i| \leq \frac{n^pe^n}{(p-1)!}(n!)^p\sum_{i=0}^{n}|a_i| \to 0 \text{ quand } p \to \infty \end{aligned}$$

alors pour un p premier assez grand tel que $p > n$ et $p > a_i$ on a $\sum_{i=0}^{n} a_i\epsilon_i = 0$, donc $p | \sum_{i=0}^{n} a_i\epsilon_i$ ce qui est absurde. Donc, e est transcendant. $\square$

2.4 Théorème de Lindemann-Weierstrass

Théorème 3. *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ n nombres algébriques linéairements indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors $e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_n}$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration: Nous allons utiliser les notations suivantes tout au long de la preuve :

- $\forall f \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(x) = \sum a_k x^k$ on pose $\overline{f}(x) = \sum |a_k| x^k$.
- $I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u) du$

On remarque que

$$|I(t)| \leq |t| e^{|t|} \overline{f}(|t|) \tag{4}$$

et qu'après plusieurs intégrations par parties on obtient

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) \tag{5}$$

avec $m = deg(f)$.
Maintenant supposons par l'absurde que

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + ... + \beta_n e^{\alpha_n} = 0 \tag{6}$$

où $\beta_1, ..., \beta_n$ sont n nombres algébriques différents de 0.
Nous allons provisoirement admettre trois suppositions qui sont essentielles pour la preuve et qui vont être prouvé à la fin de la preuve.

a. On peut supposer que les β_i sont des entiers rationnelles.
b. On peut supposer que dans (6) chaque conjugué de α_i existe pour tout i et si α_i et α_j sont conjugués alors $\beta_i = \beta_j$.
c. Si (6) vérifie les deux suppositions précédentes, alors il existe i_0 tel que $\beta_{i_0} \neq 0$.

Commençons la preuve sous ces conditions :
Soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $l\alpha_1, ..., l\alpha_n$ et $l\beta_1, ..., l\beta_n$ soient des entiers algébriques.
On définie

$$f_i(x) = l^{np} \frac{(x-\alpha_1)^p ... (x-\alpha_n)^p}{(x-\alpha_i)} \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \text{ et } p \text{ premier}$$

Les conditions sur p seront déterminées au long de la preuve.
A partir de f_i on définie I_i

$$I_i(t) = \int_0^t e^{t-u} f_i(u) du$$

Alors, d'après la remarque que l'on a fait au début de la preuve

$$I_i(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f_i^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f_i^{(j)}(t) \tag{7}$$

A partir de I_i on définit J_i pour tout $i \in \{1, ..., n\}$

$$J_i = \beta_1 I_i(\alpha_1) + ... + \beta_n I_i(\alpha_n)$$

Grâce à (5) et (6), nous allons exprimer J_i en fonction de f_i

$$\begin{aligned} J_i &= \sum_{k=1}^{n} \beta_k I_i(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k (e^{\alpha_k} \sum_{j=0}^{m} f_i^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f_i^{(j)}(\alpha_k)) \\ &= \sum_{j=0}^{m} f_i^{(j)}(0) \sum_{k=1}^{n} \beta_k e^{\alpha_k} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \beta_k fi^{(j)}(\alpha_k) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \beta_k f_i^{(j)}(\alpha_k) \end{aligned}$$

Supposons $k \neq i$
- Si $j < p$ alors $f_i^{(j)}(\alpha_k) = 0$
- Si $j \geq p$ alors $p!$ divise $f_i^{(j)}(\alpha_k)$

et pour $k = i$
- Si $j < p - 1$ alors $f_i^{(j)}(\alpha_i) = 0$
- Si $j \geq p$ alors $p!$ divise $f_i^{(j)}(\alpha_i)$
- Si $j = p - 1$ alors $(p - 1)!$ divise $f_i^{(j)}(\alpha_i)$

donc, pour tout i J_i est divisible par $(p - 1)!$
En re-numérotant les α_i de manière à ce que ; $\alpha_1, .., \alpha_s$ ne sont pas conjugués deux à deux et $\alpha_{s+1}, .., \alpha_n$ sont conjugués de $\alpha_1, .., \alpha_s$; on a

$$J_i = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{s} \beta_i (f_i^{(j)}(\alpha_{k,0}) + f_i^{(j)}(\alpha_{k,1}) + ... + f_i^{(j)}(\alpha_{k,u}) + ...) \tag{8}$$

où $\alpha_{k,0} = \alpha_k$ et $\alpha_{k,u}$ représentent le u^{ieme} conjugué de α_k. On remarque que la somme intérieur de (8) est un polynôme en α_i de coefficients entiers. Donc $|J_1...J_n|$ est divisible par $((p-1)!)^n$. Comme par la supposition (c) $|J_1...J_n| \neq 0$, on a finalement $((p-1)!)^n \leq |J_1...J_n|$. D'autre part pout tout i

$$|J_i| \leq \sum_{k=1}^{n} |\beta_k||I_i(\alpha_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\beta_k||\alpha_k| e^{\alpha_k} \overline{f_i}(|\alpha_k|)$$

On majore la dernière somme finie par d_i^p où d_i est indépendant de p.
Donc, en choisissant p tel que $(d_1...d_n)^p < ((p - 1)!)^n$, on obtient une contradiction.
Maintenant vérifions les 3 suppositions

Supposition (a)
Soient $(b_{i,j_i})_{j_i}$ tous les conjugués de β_i tel que $\beta_{i,0} = \beta_i$. Grâce à (6)

$$\prod (\beta_{1,j_1} e^{\alpha_1} + ... + \beta_{n,j_n} e^{\alpha_n}) = b_1 e^{\gamma_1} + ... + b_k e^{\gamma_k} = 0$$

avec b_i un polynôme en $(\beta_j)_{j=1..n}$ et ses conjugués et γ_i la combinaison linéaire de $(\alpha_j)_{j=1..n}$. Donc b_i est rationnel. Si on pose $d = ppcm((b_i)_{i=1..k})$ alors pour tout $i \in \{1, ..., k\}$ $db_i \in \mathbb{Z}$ et $db_1 e^{\gamma_1} + ... + dbe^{\gamma_k} = 0$. Donc on peut supposer dés le départ que les β_i sont des entiers rationnels.

Supposition (b)
Avec la supposition (a), soient les $(\alpha_i)_{i=1...n}$ des racines du polynôme g de degré $m \geq n$. Alors g a m racines $(\alpha_i)_{i=1...m}$. En supposant $\beta_{n+1} = ... = \beta_m = 0$ et grâce à (6)

$$\prod_{\sigma \in S(m)} (\beta_1 e^{\alpha_{\sigma(1)}} + ... + \beta_m e^{\alpha_{\sigma(m)}}) = c_1 e^{\delta_1} + ... + c_k e^{\delta_k} = 0 \tag{9}$$

où c_i est un polynôme en $(\beta_j)_{j=1..m}$ donc c_i est un entier et δ_i de la forme

$$\delta_i = t_1 \alpha_1 + ... + t_m \alpha_m$$

et son conjugué

$$t_1 \alpha_{1,\sigma(1)} + ... + t_m \alpha_{m,\sigma(m)}$$

Comme (9) est symétrique en δ_i les coefficients de termes, dont les exposants sont conjugués, sont égaux.

Supposition (c)
Dans (6), on peut supposer que chaque α_i est différent (sinon on les groupe). Donc en considérant l'ordre léxicographique sur les nombres complexes, on déduit qu'il existe un unique sommant dans chaque parenthèse de (9) dont l'exposant est le plus grand par cet ordre et le coefficient est non nul. Quand on expand ce produit, on obtiendra un terme qui sera le produit des termes des plus grand exposants de chaque parenthèse et ce terme aura un coefficient non nul. □

Grâce à ce théorème, la transcendance de e et Π sont faciles à démontrer. Voici quelques corollaires de ce théorème

Corollaire 2. Π *est transcendant.*

Démonstration: Supposons par l'absurde que Π est algébrique. Comme i vérifie l'équation $X^2 + 1 = 0$, i est algébrique. De plus, l'ensemble des nombres algébriques non nuls est un corps pour les operations habituelles. Alors $i\Pi$ est aussi algébrique. En prenant $\alpha_1 = i\Pi$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, on obtient

$$e^{i\Pi} + e^0 = 0$$

Donc, d'après le théorème de Lindemann-Weierstrass $i\Pi$ n'est pas algébrique (Absurde). □

Corollaire 3. *Soit* α *un nombre algébrique non nul alors* e^α *transcendant et si de plus* $\alpha \neq 1$ *alors* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sinh\alpha$, $\cosh\alpha$, $\arcsin\alpha$, $\arccos\alpha$, $\log\alpha$ *sont transcendants.*

Démonstration: Par le théorème de Lindemann-Weierstrass

$$\forall \beta \in \overline{\mathbb{Q}} \quad e^{\alpha} + \beta e^{0} \neq 0$$

donc $e^{\alpha} \neq -\beta$
Quant à $\sin\alpha$; comme α est algébrique, on a $i\alpha$ algébrique. Or $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$, d'où

$$e^{2i\alpha} - 1 - 2i\sin\alpha e^{i\alpha} = 0 \tag{10}$$

Si on suppose que $\sin\alpha$ est algébrique, on aura une contradiction entre le théorème de Lindemann-Weierstrass et (10). Donc $\sin\alpha$ est transcendant. $\square$

3 Théorème de Gel'Fond-Schneider

Dans ce chapitre, nous allons étudier le théorème de Gel'fond-Schneider qui a été prouvé indépendamment par ces deux mathématiciens et qui répond au 7^{ieme} problème de David Hilbert posé en 1900 au Congrès de Paris.

Ce théorème nous dit :

"Soient α, β deux nombres algébriques tel que $\beta \notin \mathbb{Q}$, $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 1$ alors α^β est transcendant."

Remarque 5. *On remarque tout de suite que ce théorème peut être exprimé de trois manières équivalentes :*

1. *Soient α, β deux nombres algébriques tel que $\beta \notin \mathbb{Q}$, $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 1$ alors α^β est transcendant.*
2. *Si l et β sont deux nombres complexes tel que $l \neq 0$ et $\beta \notin \mathbb{Q}$ alors au moins l'un des trois nombres suivants est transcendant β, e^l et $e^{\beta l}$*
3. *Si α, β sont deux nombres algébriques différents de zéros avec $\log\alpha$ et $\log\beta$ linéairements indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors ils sont linéairements indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (les nombres algébriques dans $\mathbb{C}$), autrement dit*

$$\frac{\log\beta}{\log\alpha}$$

est transcendant.

Démonstration:

<u>$1 \Rightarrow 2$</u> Si β est transcendant rien à démontrer alors,soient l, β deux nombres complexes algébriques tels que $l \neq 0$ et $\beta \notin \mathbb{Q}$, on a $e^l \neq 0$. On prend $\alpha = e^l$.Si α est transcendant alors (2) est démontré, si α est algébrique alors (1) implique $\alpha^\beta = e^{l\beta}$ est transcendant d'où (2).

<u>$2 \Rightarrow 3$</u> Soient α, β deux nombres algébriques différents de zéro tel que $\log\alpha$ et $\log\beta$ sont $\mathbb{Q}$-linéairements indépendants.
Alors, $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0 \Rightarrow a\log\alpha + b\log\beta \neq 0 \Rightarrow \log\alpha + \frac{b}{a}\log\beta \neq 0 \Rightarrow \alpha$ et β ne peuvent pas être 1 en même temps. Disons que $\log\alpha \neq 0$. Alors,

$$\frac{\log\beta}{\log\alpha} \notin \mathbb{Q}$$

On pose $l = \log\alpha$. D'après (2), au moins l'un des trois nombres suivants est transcendant :

$$\frac{\log\beta}{\log\alpha}, \quad \alpha, \quad e^{\log\alpha\frac{\log\beta}{\log\alpha}} = \beta$$

Or α et β sont algébriques par hypothèse donc $\frac{\log\beta}{\log\alpha}$ est transcendant.

<u>$3 \Rightarrow 1$</u> Supposons par l'absurde que $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $\beta \notin \mathbb{Q}$, α, β et α^β algébriques.
Si dans (3.) de la remarque (5), on prend α et α^β comme deux nombres algébriques différents de zéros, on aura

$$1 \cdot \log\alpha^\beta - \beta \cdot \log\alpha = 0$$

Comme $\beta \notin \mathbb{Q}$ mais algébrique, on en déduit que $\log \alpha^\beta$ et $\log \alpha$ sont dépendants dans $\overline{\mathbb{Q}}$.
Encore d'après (3) de la remarque (5), on a $\exists a, b \in \mathbb{Q}$ non tous nuls tel que $a \log \alpha^\beta + b \log \alpha = 0$
Si $a \neq 0$,

$$\log \alpha^\beta + \frac{b}{a} \log \alpha = 0 \Rightarrow (\beta + \frac{b}{a}) \log \alpha = 0$$

$\alpha \neq 1$ par hypothèse, d'où $\beta = -\frac{b}{a}$ absurde car $\beta \notin \mathbb{Q}$

□

3.1 Préliminaires

Avant de voir comment Gel'fond et Schneider ont démontré ce théorème, nous allons montrer quelques résultats importants dont on a besoin pour la suite.

3.1.1 Lemme de Schwarz

Rappel 1 (Principe de maximum). *Soit f une fonction analytique sur un ouvert contenant un disque fermé $|z| \leq R$. Alors soit f est constant, soit $|f|_r \leq |f|_R$ pour tout r réel tel que $R > r$.*

Rappel 2 (Ordre d'une fonction complexe). *Soit f une fonction entière. On dit que f est d'ordre $\leq \rho$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists K_\epsilon \text{ tel que } |f(z)| \leq K_\epsilon e^{|z|^\rho}$$

Par exemple, $\forall \epsilon > 0$, z est d'ordre $\leq \epsilon$ et $\forall l \in \mathbb{C}$, e^{zl} est d'ordre ≤ 1

Lemme 2 (Lemme de Schwarz). *Soit F une fonction analytique dans le disque $|z| \leq R$. Soit r un réel tel que $0 < r < R$. On note par $n(F, r)$ le nombre de zéros de F dans $|z| \leq r$. Alors*

$$|F|_r \leq |F|_R (\frac{R-r}{2r})^{-n(F,r)}$$

Démonstration: Soit $\zeta_1 ... \zeta_N$ les zéros de F dans le disque $|z| \leq r$ avec $N = n(F, r)$. On note

$$G(z) = F(z) \prod_{k=1}^{N} (z - \zeta_k)^{-1} \tag{11}$$

Alors, $G(z)$ est analytique et elle n'a pas de zéros dans $|z| \leq r$. Par le principe de maximum

$$|G|_r \leq |G|_R \text{ où } |G|_r := \sup_{|z|=r} |G(z)| \tag{12}$$

Puis par (11)

$$|G|_r = |F|_r \sup_{|z|=r} \prod_{k=1}^{N} |z-\zeta_k|^{-1} \quad \Rightarrow |F|_r = |G|_r \sup_{|z|=r} \prod_{k=1}^{N} |z-\zeta_k| \tag{13}$$

$$\Rightarrow |F|_r \leq |G|_r (2r)^N \text{ (car } |\zeta_k| \leq r \quad \forall k = 1...N) \tag{14}$$

D'autre part,

$$|G|_R = |F|_R \sup_{|z|=R} \prod_{k=1}^{N} |z-\zeta_k|^{-1} \geq |F|_R \sup_{|z|=R} \prod_{k=1}^{N} (|z| - |\zeta_k|)^{-1} \tag{15}$$

$$\Rightarrow |G|_R \geq |F|_R (R-r)^{-N} \tag{16}$$

En combinant (12),(14) et (16) on a $|F|_r \leq |F|_R (\frac{R-r}{2r})^{-N}$. □

Remarque 6. *:*

1. *Si $R > 3r$ alors $R - r > 2r \Rightarrow |F|_r \leq |F|_R$donc le principe de maximum est un cas particulier du lemme de Schwarz.*
2. *D'après le lemme de Schwarz, on déduit que si F a beaucoup de zéros alors la borne supérieur de F est petite.*

Lemme 3. *Si f est une fonctionne entière non nulle, d'ordre ρ alors $n(f, R) \ll R^\rho$ quand $R \to \infty$.*

Démonstration: Ce lemme sort directement de la formule de Jensen.

$$\frac{1}{2\Pi i} \int_0^{2\Pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \log |f^{(k)}(0)| + k \log r + \sum_{k=1}^{n} \log \frac{r}{|a_k|}$$

où les $(a_i)_{i=1..n}$ sont les zéros comptés avec leur multiplicité non nuls de f dans $|z| < r$, k est la multiplicité de 0. □

3.1.2 Lemme de Siegel

Lemme 4 (Lemme pour démontrer le lemme de Siegel). .
Soient (a_{ij}) avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ des nombres réels.
Soit A un nombre entier vérifiant $A \geq \max_j (\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|)$.
Soient X et l, deux nombres entiers vérifiant $l^m < (X+1)^n$.
Alors il existe des éléments $x_1, ..., x_n$ de $\mathbb{Z}$ tel que

$$\max_i |x_i| \leq X \text{ et } \max_j |\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i| \leq \frac{AX}{l}.$$

Démonstration: Ce lemme nous dit qu'un système linéaire dont le nombre des inconnus est strictement supérieur au nombre des équation admet une solution non triviale. La preuve de ce lemme est une conséquence directe de principe de tiroirs. □

Lemme 5 (Lemme de Siegel). *Soit K un corps de nombres de degrés D.*
Soient $(a_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$ les entiers de K sur $\mathbb{Z}$ avec $n > Dm$.
Soient $\sigma_1, ..., \sigma_D$ les $\mathbb{Q}$-plongements de K dans $\mathbb{C}$.
Soit A un entier positif tel que

$$A \geq \max_{\substack{1\leq j\leq m\\ 1\leq h\leq D}} \sum_{i=1}^{n} |\sigma_h(a_{ij})|$$

Alors $\exists x_1, ..., x_n$ des entiers rationnelles avec

$$0 < \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq (\sqrt{2}A)^{\frac{Dm}{n-Dm}}$$

tel que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = 0, \forall j \in \{1, .., m\}$$

Démonstration: On numérote les plongements de K dans $\mathbb{C}$ de la façon suivante :

$$\sigma_h(K) \subset \mathbb{R} \text{ pour } 1 \leq h \leq r$$
$$\sigma_h(K) \subset \mathbb{C} \text{ pour } r \leq h \leq D$$

avec $\sigma_{r+j+k} = \overline{\sigma}_{r+k}$ pour $1 \leq k \leq s$ avec $D = r + 2s$.
On définit donc $\tau_1, ..., \tau_D$ de la façon suivante :

$$\tau_h = \begin{cases} \sigma_h & \text{pour} \quad 1 \leq h \leq r \\ Re\sigma_h & \text{pour} \quad r+1 \leq h \leq r+s \\ Im\sigma_h & \text{pour} \quad r+s+1 \leq r+2s \end{cases}$$

On choisit

$$X = [(\sqrt{2}A)^{\frac{Dm}{n-Dm}}] \text{ et } l = 1 + [\sqrt{2}AX]$$

où [.] signifie la partie réelle. D'où

$$X \leq (\sqrt{2}A)^{\frac{Dm}{n-Dm}} \text{ et } (\sqrt{2}A)^{\frac{Dm}{n-Dm}} < X + 1 \Rightarrow (\sqrt{2}A)^{Dm} < (X+1)^{n-Dm}$$
$$\Rightarrow (X\sqrt{2}A + \sqrt{2}A)^{Dm} < (X+1)^n$$

Or $\sqrt{2}A > 1$ et ceci implique $(\sqrt{2}AX + 1)^{Dm} < (X+1)^n$.
Comme

$$l = 1 + [\sqrt{2}AX] \text{ on a } l \leq 1 + \sqrt{2}AX \text{ donc } l^{Dm} < (X+1)^n.$$

Donc par le lemme précèdent, il existe $x_1, ..., x_n$ entiers rationnels tels que

$$0 < \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq (\sqrt{2}A)^{\frac{Dm}{n-Dm}} \text{ et } \max_{\substack{1\leq j\leq m\\ 1\leq h\leq D}} |\sum_{i=1}^{n} \tau_h(a_{ij}x_i)| \leq \frac{AX}{l}$$

Il est clair que

$$\max_{\substack{1\leq j\leq m\\ 1\leq h\leq r}} |\sum_{i=1}^{n} \tau_h(a_{ij}x_i)| \leq \frac{AX}{l} \text{ et } \max_{\substack{1\leq j\leq m\\ r+1\leq h\leq D}} |\sum_{i=1}^{n} \tau_h(a_{ij}x_i)| \leq \sqrt{2}\frac{AX}{l}$$

En supposant, par l'absurde que $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \neq 0$ on passe à la norme et on a

$$\begin{aligned} 1 \leq |N_{K/\mathbb{Q}}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i)| &\leq \prod_{h=1}^{D} |\sigma_h(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i)| = \prod_{h=1}^{D} |\sum_{i=1}^{n} \sigma_h(a_{ij})x_i| \\ &= \prod_{h=1}^{r} |\sum_{i=1}^{n} \sigma_h(a_{ij})x_i| \cdot \prod_{h=r+1}^{D} |\sum_{i=1}^{n} \sigma_h(a_{ij})x_i| \\ &\leq (\frac{AX}{l})^r (\frac{AX}{l})^{2s} = (\frac{\sqrt{2}AX}{l})^D \end{aligned}$$

Mais comme

$$\sqrt{2}AX < 1 + [\sqrt{2}AX] = l$$

on a

$$1 \leq |N_{K/\mathbb{Q}}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i)| < 1$$

(absurde). Donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = 0$$

□

Remarque 7. *On peut aussi résoudre un système $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = 0$ pour tout $j \in \{1..m\}$ dont les coefficients sont dans K. Pour cela, on multiplie chaque équation du système par le dénominateur commun d_j de cette équation, puis on applique le lemme de Siegel en remplaçant A par dA où $d = max_j d_j$.*

3.2 Méthode de Gel'Fond

Nous allons procéder par l'absurde. En utilisant (2) de la remarque (5), on suppose que les trois nombres b, e^l, e^{bl} sont algébriques où l et b sont complexes avec $l \neq 0$ et $b \notin \mathbb{Q}$. Comme $b \notin \mathbb{Q}$, $b \neq 1$ et b algébrique, l et bl sont distincts. Donc e^l et e^{bl} sont algébriquement indépendants. Si on pose $z = jl$, $j \in \mathbb{Z}$, on a aussi e^z et e^{bz} algébriquements

indépendants et ils prennent des valeurs dans le corps $K = \mathbb{Q}(b, e^l, e^{bl})$ avec leurs dérivées. Afin d'obtenir une contradiction, on construit un polynôme non nul $P_N \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$, dépendant de N qui est suffisamment grand, tel que la fonction $F_N(z) = P_N(e^z, e^{zl})$ soit identiquement nulle et ça sera la contradiction voulue. On construit donc, d'abord le polynôme P_N tel que F_N ait des zéros aux quelque points, plus précisément au chaque point de $S = \{jl | 0 \leq j \leq D+1\}$ (où D est le degré du corps K)de multiplicité élevée et finalement $F_N \equiv 0$.

Etape 1 :

Nous voulons montrer qu'il existe un polynôme non nul $P_N \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$ de degré inférieur ou égale à $[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]$ par rapport à X_1 et X_2 et de taille inférieur ou égale à $3DN^2$ tel que la fonction $F_N(z) = P_N(e^z, e^{bz})$ vérifie $\frac{d^s}{dz^s} F_N(jl) = 0$ pour $j \in \{0, ..., D+1\}$ et $s \in \{0, .., N-1\}$. Considérons le polynôme inconnu sous la forme

$$P_N(X_1, X_2) = \sum_{\lambda=0}^{[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]} \sum_{\mu=0}^{[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]} p_N(\lambda, \mu) X_1^\lambda X_2^\mu$$

Alors notre fonction $F_N(z) = F_N(jl)$ est

$$\begin{aligned} F_N(z) = P_N(e^z, e^{bz}) &= \sum_{\lambda=0}^{[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]} \sum_{\mu=0}^{[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]} p_N(\lambda, \mu) e^{\lambda z} e^{\mu b z} \\ &= \sum_{\lambda=0}^{[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]} \sum_{\mu=0}^{[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]} p_N(\lambda, \mu) e^{\lambda jl} e^{\mu bjl} \end{aligned}$$

Pour obtenir le système d'équations en $p_N(\lambda, \mu)$ on doit calculer les dérivées de F_N aux points jl pour $j \in \{0, ..., D+1\}$. Il est clair que pour tout $s \in \{0, ..., N-1\}$

$$\frac{d^s}{dz^s} F_N(z) = \sum_{\lambda=0}^{[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]} \sum_{\mu=0}^{[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]} p_N(\lambda, \mu)(\lambda + \mu b)^s e^{\lambda jl} e^{\mu bjl}$$

d'où notre système de coefficients dans I_K est

$$\begin{aligned} & d^{[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]^2} \frac{d^s}{dz^s} F_N(jl) \\ &= \sum_{\lambda=0}^{[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]} \sum_{\mu=0}^{[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]} p_N(\lambda, \mu)(d\lambda + d\mu b)^s (de^l)^{\lambda j} (de^{bl})^{\mu j} d^{[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]^2 - s - \lambda j - \mu j} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pout tout $j \in \{0, ..., D+1\}$ et $s \in \{0, ..., N-1\}$ et où d est le dénominateur commun de b, e^l, e^{bl}.

Donc le système consiste de $[(N\log N)^{\frac{1}{2}}]^2$ inconnues et $N(D+2)$ équations. Il est facile de voir que pour N suffisamment grand, on a $[(N\log N)^{\frac{1}{2}}]^2 > N(D+2)$. De plus, si on note par $coeff$ le coefficient de $d^{[(N\log N)^{\frac{1}{2}}]^2}\frac{d^s}{dz^s}F_N(jl)$, on a

$$||coeff|| \leq d^N(N\log N)^{\frac{N}{2}}(1+||b||)^N d^{(2D+4)(N\log N)^{\frac{1}{2}}}||e^{l+bl}||^{(D+2)(N\log N)^{\frac{1}{2}}}d^{N\log N}$$

d'où la taille du coefficient est majoré par

$$(N+N\log N+N(2D+4)\log N)\log d+\frac{N}{2}\log(N\log N)+N\log(1+||b||)\leq$$
$$3N^2+N^3+2N^4\leq 6N^4$$

D'après le lemme de Siegel, on peut trouver des nombres entiers rationnels tels que

$$||p_N(\lambda,\mu)||\leq(6\sqrt{2}N^4)^{\frac{N(D+2)}{[(N\log N)^{\frac{1}{2}}]^2-N(D+2)}}$$

et tel que la fonction F_N vérifie $\frac{d^s}{dz^s}F_N(jl)=0$ pour tout $s\in\{0,...,N-1\}$ et $j\in\{0,...,D+1\}$. Il est possible d'améliorer la majoration de la taille de $p_N(\lambda,\mu)$ de la façon suivante :
On peut majorer :

$$\frac{N(D+2)}{[(N\log N)^{\frac{1}{2}}]^2-N(D+2)}$$

par

$$\begin{aligned}&\frac{N(D+2)}{((N\log N)^{\frac{1}{2}}-1)^2-N(D+2)}=\frac{N(D+2)}{N\log N-2(N\log N)^{\frac{1}{2}}+1-N(D+2)}\\ \leq&\frac{N(D+2)}{N\log N-2N-N(D+2)}=\frac{D+2}{\log N-D-4}\\ \leq&\frac{3D^2}{\log N-D-4}\end{aligned}$$

d'où

$$t(p_N(\lambda,\mu))\leq\frac{3D^2}{\log N-D-4}(\log 6\sqrt{2}+4\log N)\leq 3D^2N$$

d'où l'existence de P_N vérifiant les conditions voulues.

Etape 2 :

Notre but est d'arriver à montrer que

$$\forall s\in\mathbb{N}\quad\forall j\in\{0,...,D+1\},\quad\frac{d^s}{dz^s}F_N(jl)=0$$

A la première étape, on a montré que

$$\forall s\in\{0,...,N-1\}\quad\forall j\in\{0,...,D+1\}\quad\frac{d^s}{dz^s}F_N(jl)=0x$$

Maintenant, on veut montrer la même chose pour $s = M$ où $M \geq N$. Pour cela, on suppose par l'absurde que, M soit le plus petit entier pour lequel $\exists j_0 \in \{0, ..., D+1\}$ tel que

$$\gamma_N = \frac{d^M}{dz^M} F_N(j_0 l) \neq 0$$

Etape 3 :[Majoration de $|\gamma_N|$]

Comme F_N est analytique dans le disque de rayon $(D+1)|l|$, on a

$$|\frac{d^M}{dz^M} F_N(j_0 l)| \leq \frac{M!}{|l|^M (D+1)^M} |F_N|_{(D+1)|l|}$$

par inégalité de Cauchy.

Considérons aussi le disque de rayon $R = M^{\frac{1}{2}}$. Comme N est suffisamment grand et $M \geq N$ on peut supposer que $M^{\frac{1}{2}} > 2(D+1)|l|$. Donc d'après le lemme de Schwarz on a

$$|F_N|_{(D+1)|l|} \leq |F_N|_R (\frac{R}{2|l|(D+1)})^{-n(F,(D+1)|l|)} \tag{17}$$

où $n(F, (D+1)|l|)$ signifie les zéros de F_N dans le disque de rayon $(D+1)|l|$.

Par hypothèse, on sait que $0, l, 2l, ..., (D+1)l$ sont des zéros d'ordre $M-1$ de F_N dans le disque de rayon $(D+1)|l|$. Alors compté avec leur multiplicité F_N, a au moins $(M-1)(D+2)$ racines dans le disque, d'où

$$|F_N|_{(D+1)|l|} \leq |F_N|_R (\frac{R}{2|l|(D+1)})^{-(M-1)(D+2)} \tag{18}$$

D'autre part,

$$|F_N|_R = \sup_{|z|=R} |F_N|_R = \sup_{|z|=R} |\sum_{\lambda=0}^{[(N\log N)^{\frac{1}{2}}]} \sum_{\mu=0}^{[(N\log N)^{\frac{1}{2}}]} p_N(\lambda,\mu) e^{\lambda z} e^{\mu b z}| \tag{19}$$

$$\leq \max_{\lambda,\mu} |p_N(\lambda,\mu)| e^{(N\log N)^{\frac{1}{2}} R(1+|b|)} N \log N \tag{20}$$

$$\leq e^{(M\log M)^{\frac{1}{2}} R(1+|b|)} e^{3DM^2} M \log M \tag{21}$$

Donc (18) et (21) impliquent

$$\begin{aligned}
\log|\gamma_N| \leq & M\log M + M(\log M)^{\frac{1}{2}}(1+|b|) + 3D^2 M + \log(M\log M) - M\log(|l|(D+1)) \\
& + (M-1)(D+2)(\log 2 + \log|l|(D+1)) - \frac{(M-1)(D+2)}{2}\log M \\
= & \frac{-DM\log M}{2} + \frac{D\log M}{2} + 3\log M + M(D+2)\log 2 + (D+1)M\log(|l|(D+1)) \\
& + M(\log M)^{\frac{1}{2}}(1+|b|) + 3D^2 M \\
\leq & \frac{-1}{2} DM\log M + M(\log M)^{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

Etape 4 :[Minoration de $|\gamma_N|$]

Pour minorer γ_N, grâce au lemme d'inégalité de taille il suffit de majorer la taille de γ_N. Pour cela il faut calculer le dénominateur de γ_N et $||\gamma_N||$. Il est immédiat que pour le dénominateur on a

$$\begin{aligned} den(\gamma_N) &\leq d^{M+2(N\log N)^{\frac{1}{2}}}(D+1) \quad \Rightarrow \log den(\gamma_N) \leq (M+2(N\log N)^{\frac{1}{2}}(D+1))\log d \\ &\leq M(\log M)^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

et pour $||\gamma_N||$ on a

$$\begin{aligned} ||\gamma_N|| &\leq e^{3D^2N}((N\log N)^{\frac{1}{2}})^M(1+|b|)^M + e^{|l|(N\log N)(D+1)(1+|b|)} \\ \Rightarrow \log||\gamma_N|| &\leq 3D^2M + M(M\log M)^{\frac{1}{2}} + M\log(1+|b|) + |l|(M\log M)(D+1)(1+|b|) \\ &\leq \frac{1}{8}M\log M + \frac{1}{8}M(\log M)^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

D'où $t(\gamma_N) \leq \frac{1}{8}M\log M + \frac{1}{8}M(\log M)^{\frac{3}{4}}$. Donc le lemme d'inégalité de taille implique

$$\log|\gamma_N| \geq -\frac{D}{4}(M\log M + M(\log M)^{\frac{3}{4}})$$

Conclusion :

En combinant l'étape trois et quatre on constate l'inégalité

$$\frac{D}{4} \geq \frac{D}{4}(\log M)^{\frac{1}{4}} - 1$$

ce qui est absurde pour M assez grand.
Donc $\gamma_N = 0$.
Donc pour tout

$$M \in \mathbb{N}, \frac{d^M}{dz^M}F_N(0) = 0$$

ce qui veut dire que F_N construite à la premiere étape est identiquement nulle et ce qui aussi contredit l'indépendance algébrique de e^z et e^{bz}.

3.3 Méthode de Schneider

La démonstration s'effectue par l'absurde. En utilisant (2) de la remarque (5) on suppose que les trois nombres b, e^l, e^{bl} sont algébriques où l et b sont deux nombres complexes tels que $l \neq 0$ et $b \notin \mathbb{Q}$. Si on pose $z = i + jb$ avec $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, on a z et e^{lz} algébriquements indépendants et ils prennent des valeurs dans le corps $K = \mathbb{Q}(b, e^l, e^{bl})$ de degré D. Alors notre but est de construire un polynôme non nul $P_N \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$, dépendant de N qui est un entier suffisamment grand, tel que $P_N(z, e^{zl}) = 0$ et ça sera la contradiction attendue. On construit d'abord ce polynôme non nul P_N tel que $F_N(z) = P_N(z, e^{zl})$ possède de nombreux zéros, plus précisément à chaque point de l'ensemble $S_N = \{i + jb | 1 \leq 1 \leq N, 1 \leq j \leq N\}$ et puis on montre que F_N s'annule sur l'ensemble $S = \{i + jb | (i,j) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $F_N \equiv 0$.

Etape 1 :

Dans cette étape, on montre qu'il existe un polynôme non nul $P_N \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$ de degré inférieur ou égale à $N^{\frac{3}{2}}$ par rapport à X_1, de degré inférieur ou égale à $2DN^{\frac{1}{2}}$ par rapport à X_2 et de taille inférieur ou égale à $2N^{\frac{3}{2}} \log N$ tel que la fonction $F_N(z) = P_N(z, e^{lz})$ vérifie $F_N(i + jb) = 0$ pour $i \in \{1, ..., N\}$ et $j \in \{1, ..., N\}$ avec $N^{\frac{1}{2}}$ un entier et d le dénominateur commun de b, e^l, e^{bl}. Pour obtenir ce résultat, on écrit le polynôme inconnu sous la forme

$$P_N(X_1, X_2) = \sum_{\lambda=0}^{N^{\frac{3}{2}}-1} \sum_{\mu=0}^{2DN^{\frac{1}{2}}-1} p_N(\lambda, \mu) X_1^{\lambda} X_2^{\mu} \quad \text{avec} \quad p_N(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}$$

et on considère le système d'équations en $p_N(\lambda, \mu)$ et de coefficients dans I_K

$$d^{(4D+1)N^{\frac{3}{2}}} F_N(i + jb) = 0 \quad \text{pour} \quad i, j \in \{1, ..., N\}$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{\lambda=0}^{N^{\frac{3}{2}}-1} \sum_{\mu=0}^{2DN^{\frac{1}{2}}-1} p_N(\lambda, \mu)(di + djb)^{\lambda}(de^l)^{i\mu}(de^{bl})^{j\mu} d^{(4D+1)N^{\frac{3}{2}}-\lambda-i\mu-j\mu} = 0$$
$$\text{pour} \quad i, j \in \{1, ..., N\}$$

On obtient ainsi un système de N^2 équations à $N^{\frac{3}{2}}.2DN^{\frac{1}{2}} = 2DN^2$ inconnues à coefficients dans I_K.

Si on note par $coeff$ le coefficient de $d^{(4D+1)N^{\frac{3}{2}}} F_N(i + jb)$, on a :

$$\begin{aligned} ||coeff|| &= d^{N^{\frac{3}{2}}} N^{N^{\frac{3}{2}}} (1 + ||b||)^{N^{\frac{3}{2}}} d^{4DN^{\frac{3}{2}}-2N} e^{l(2DN^{\frac{3}{2}}-N)} e^{bl(2DN^{\frac{3}{2}}-N)} d^{4DN^{\frac{3}{2}}+N^{\frac{3}{2}}} \\ &= N^{N^{\frac{3}{2}}} d^{8DN^{\frac{3}{2}}+2N^{\frac{3}{2}}-2N} (1 + ||b||)^{N^{\frac{3}{2}}} e^{(l+bl)(2DN^{\frac{3}{2}}-N)} \\ &\leq N^{N^{\frac{3}{2}}} d^{8DN^{\frac{3}{2}}+2N^{\frac{3}{2}}} (1 + ||b||)^{N^{\frac{3}{2}}} e^{(l+bl)2DN^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Puis en passant à log on obtient la majoration suivante pour la taille des coefficients

$$N^{\frac{3}{2}} \log N + N^{\frac{3}{2}}((8D + 2) \log d + \log(1 + ||b||) + 2D \log ||e^{l+bl}||) \leq \frac{3}{2} N^{\frac{3}{2}} \log N$$

On remarque de plus que l'exposant $\frac{Dm}{n-Dm}$ du lemme de Siegel est ici égal à 1.

Alors, le lemme de Siegel permet de trouver des nombres entiers rationnels $p_N(\lambda, \mu)$ pour $0 \leq \lambda \leq N^{\frac{3}{2}} - 1$ et $0 \leq \mu \leq 2DN^{\frac{1}{2}} - 1$ non tous nuls, vérifiant $t(p_N(\lambda, \mu)) \leq 2N^{\frac{3}{2}} \log N$ et tels que la fonction F_N vérifie $F_N(i + jb) = 0$ pour $i, j \in \{1, ..., N\}$.

Etape 2 :

Comme $P_N \neq 0$ et $l \neq 0$, F_N n'est pas une fonction identiquement nulle. Or F_N est une fonction entière, d'ordre inférieur ou égale à 1. En fait ;

$$|F_N|_R = \sup_{|z|=R} |F_N(z)| = \sup_{|z|=R} |\sum_{\lambda=0}^{N^{\frac{3}{2}}-1} \sum_{\mu=0}^{2DN^{\frac{1}{2}}-1} p_N(\lambda, \mu) z^{\lambda} e^{zl\mu}|$$

Par le lemme de Siegel, on sait que $\log|p_N(\lambda,\mu)| \leq 2N^{\frac{3}{2}}\log N$ d'où

$$|F_N|_R \leq 2DN^2R^{N^{\frac{3}{2}}}e^{R|l|2DN^{\frac{1}{2}}}\max|p_N(\lambda,\mu)| \tag{22}$$

$$\Rightarrow \log|F_N|_R \leq \log(2DN^2) + N^{\frac{3}{2}}\log R + R|l|2DN^{\frac{1}{2}} + 2N^{\frac{3}{2}}\log N \tag{23}$$

$$\text{donc } \log|F_N|_R \ll R \Rightarrow \text{l'ordre de } F_N \text{ est } \leq 1 \tag{24}$$

Donc, d'après le lemme (3), il existe un point $z_0 = i_0 + j_0 b \in S$ tel que $F_N(z_0)$ soit non nul. En combinant ce résultat avec la conclusion de la première étape, on constate qu'il existe un entier $M \geq N$ tel que

$$F_N(i+jb) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq M \text{ et } 1 \leq j \leq M$$

et il existe $(i_0, j_0) \in \{1, ..., M+1\}^2$ avec

$$\gamma_N := F_N(i_0 + j_0 b) \neq 0$$

Etape 3 :[Majoration de $|\gamma_N|$]

Dans cette étape de la démonstration, nous allons majorer γ_N grâce au principe de maximun qui est un cas particulier du lemme de Schwarz. On remarque pour cela que la fonction

$$F_N(z)\prod_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{M}(z-i-jb)^{-1}$$

est entière d'après l'étape (2). On lui applique le principe de maximum sur le disque

$$|z| \leq R = (1+|b|)M^{\frac{5}{4}}$$

et on obtient

$$\frac{|F_N(i_0+j_0b)|}{\prod_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{M}(i_0-i+(j_0-j)b)} \leq |F_N|_R \sup_{|z|=R}\left(\prod_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{z-i-jb}\right)$$

$$\Rightarrow \gamma_N = |F_N(i_0+j_0b)| \leq |F_N|_R\prod_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{M}\sup_{|z|=R}\left(\frac{i_0-i+(j_0-j)b}{z-i-jb}\right)$$

Ensuite, en passant à log on a

$$\log|\gamma_N| \leq \log|F_N|_R + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\log\left(\sup_{|z|=R}\left|\frac{(i_0-i)+(j_0-j)b}{z-i-jb}\right|\right)$$

On majore $\frac{i_0-i+(j_0-j)b}{z-i-jb}$ par

$$\frac{(M+2)(1+|b|)}{R-M(1+|b|)} \leq \frac{M+2}{M^{\frac{5}{4}}-M} \leq 2M^{\frac{-1}{4}}$$

pour N (donc M) suffisamment grand et pour $|z| = R$.
D'autre part, grâce à (23) on a

$$\begin{aligned}\log|F_N| &\leq 2DM^{\frac{1}{2}}|l|(1+|b|)M^{\frac{5}{4}} + M^{\frac{3}{2}}(\log(1+|b|) + \frac{5}{4}\log M) + 2M^{\frac{3}{2}}\log M \\ &\leq 2D(1+|b|)M^{\frac{7}{4}}\log(1+|b|) + \frac{13}{4}M^{\frac{7}{4}}\log M \\ &\leq 2M^2\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\log|\gamma_N|_R \leq 2M^2 + M^2\log 2M^{\frac{-1}{4}} \leq \frac{-1}{5}M^2\log M$$

ce qui démontre la majoration de γ_N.

Etape 4 :[Minoration de $|\gamma_N|$]
Pour minorer γ_N, il suffit de majorer la taille $t(\gamma_N)$ et puis utiliser le lemme d'inégalité de taille. On sait que, par définition

$$t(\gamma_N) = \max(\log den(\gamma_N), \log||\gamma_N||)$$

où $den(\gamma_N)$ représente le dénominateur de γ_N. Alors, calculons le dénominateur de γ_N et $||\gamma_N||$.
Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}den(\gamma_N) &= d^{N^{\frac{3}{2}}+4DN^{\frac{1}{2}}(M+1)} \\ \Rightarrow \log den(\gamma_N) &= (N^{\frac{3}{2}} + 4DN^{\frac{1}{2}}(M+1))\log d\end{aligned}$$

D'autre part, pour $||\gamma_N||$

$$||\gamma_N|| = \max_{\lambda,\mu}|p_N(\lambda,\mu)| \max_{\text{cojugué}}|i_0 + j_0 b|^{N^{\frac{3}{2}}}$$

Par le lemme de Siegel

$$\max_{\lambda,\mu}|p_N(\lambda,\mu)| \leq N^{2N^{\frac{3}{2}}}$$

et pour tout $i_0, j_0 \in \{0, ..., M+1\}$

$$\max_{\text{conjugué}}|i_0 + j_0 b|^{N^{\frac{3}{2}}} \leq (M+1)^{N^{\frac{3}{2}}}(1+|b|)^{N^{\frac{3}{2}}} \leq (M+1)^{2N^{\frac{3}{2}}}$$

d'où

$$||\gamma_N|| \leq N^{2N^{\frac{3}{2}}}(M+1)^{2N^{\frac{3}{2}}} \leq (M+1)^{4M^{\frac{3}{2}}}$$

et

$$\log||\gamma_N|| \leq 4M^{\frac{3}{2}}\log(M+1)$$

Finalement, la taille de γ_N est ;

$$\text{soit plus petit ou égale à } d^{N^{\frac{3}{2}}+4DN^{\frac{1}{2}}(M+1)}$$

$$\text{soit plus petit ou égale à } 4M^{\frac{3}{2}}\log(M+1)$$

Conclusion :

Pour le premier cas, par l'inégalité de taille et par la majoration, on a

$$-2D(M^{\frac{3}{2}}+4DM^{\frac{1}{2}}(M+1))\log d \leq \frac{-1}{5}M^2\log M$$
$$\Rightarrow M^{\frac{1}{2}}\log M \leq 10D\log d((4D+1)+\frac{4D}{M})$$

pour M assez grand (absurde).
Pour le deuxième cas, encore par l'inégalité de taille et par la majoration, on a

$$-8DM^{\frac{3}{2}}\log(M+1) \leq \frac{-1}{5}M^2\log M$$
$$\Rightarrow \log M \leq 40D\frac{\log(M+1)}{M^{\frac{1}{2}}}$$

pour M assez grand (absurde).

Donc, il n'existe pas un tel (i_0, j_0) tel que $F_N(i_0, j_0) \neq 0$.
Donc, F_N est identiquement nulle ce qui contredit l'indépendance de z et e^{lz}.

3.4 Application

Le théorème (4) est démontré par Michel Waldschmidt pour d quelconque, même si l'énonce est donnée pour la première fois par Serge Lang. Ce dernier l'a prouvé pour $d = 2$. La preuve de Waldschmidt que nous allons donner suit exactement la méthode de Schneider. En fait, il la généralise, car ici au lieu de considérer deux fonctions exponentielles algébriquements indépendantes, on prend d fonctions quelconques algébriquements indépendantes. On peut donc considerer le théorème de Gel'fond-Schneider comme une conséquence de ce théorème.

Théorème 4. *Soit K un corps de nombres. Soient $f_1, ..., f_d$ fonctions entiers algébriquements indépendants sur $\mathbb{Q}$ d'ordre inférieur ou égale à $\rho_1, ..., \rho_d$ respectivement avec $d \geq 2$. Soit l un nombre réel positif et soit S_N une suite de sous ensembles finis de $\mathbb{C}$ tel que*

$$f_i(S_N) \subset K,$$
$$\max_{z\in S_N} t(f_i(z)) \ll N^{\rho_i}(1 \leq i \leq d),$$
$$card(S_N) \gg N^l,$$
$$\max_{z\in S_N} |z| \ll N \text{ pour } N \to \infty$$

Alors

$$l \leq \frac{\rho_1 + ... + \rho_d}{d-1}$$

Avant de passer à la preuve, nous allons donner deux corollaires directs.

Corollaire 4. *Théorème de Gel'fond-Schneider.*

Démonstration: Supposons par l'absurde que b, e^l, e^{bl} sont algébriques. On prend alors $K = \mathbb{Q}(b, e^l, e^{bl})$ et $f_1(z) = z$, $f_2(z) = e^{bz}$. Posons $S_N = \{i + jb | 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N\}$. Comme b est irrationnel, $card(S_N) = N^2$ et il est clair que $f_i(S_N) \subset K$ pour $i = 1, 2$. On peut donc prendre $l = 2$. Si ρ_1 et ρ_2 représentent les ordres de f_1 et f_2 (respectivement), on a $\rho_1 < 1$ et $\rho_2 \leq 1$. De plus, pour tout $z \in S_N$ $|z| \leq (1+|b|)N \ll N$, $t(z) \leq \log N + 2t(b) \ll N^{\rho_1}$ et $t(e^{bz}) \leq ||bz|| \ll N$. Alors, toutes les hypothèses du théorème sont vérifiés, donc $l < 2$ ce qui est absurde. □

Corollaire 5. *Soient x_1, x_2 deux nombres complexes linéairement indépendants et y_1, y_2, y_3 trois nombres complexes linéairement indépendants. Alors au moins l'un des six nombres*

$$e^{x_1 y_1}, e^{x_1 y_2}, e^{x_1 y_3}, e^{x_2 y_1}, e^{x_2 y_2}, e^{x_2 y_3}$$

est transcendant.

Démonstration: Supposons par l'absurde que tous les six nombres sont algébriques. On prend alors $K = \mathbb{Q}(e^{x_1 y_1}, e^{x_1 y_2}, e^{x_1 y_3}, e^{x_2 y_1}, e^{x_2 y_2}, e^{x_2 y_3})$ et $f_1(z) = e^{a_1 z}$, $f_2(z) = e^{a_2 z}$. Posons $S_N = \{iy_1 + jy_2 + ky_3 | 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq N\}$. Comme les y_i sont linéairements indépendants, $card(S_N) = N^3$ et on voit bien que $f_i(S_N) \subset K$ pour $i = 1, 2$. On peut donc prendre $l = 3$. Si ρ_1 et ρ_2 représentent les ordres de f_1 et f_2 (respectivement), on a $\rho_i \leq 1$ pour $i = 1, 2$. D'autre part, pour tout $z \in S_N$ $|z| \leq (|y_1| + |y_2| + |y_3|)N \ll N$ et $t(f_i(z)) \leq ||a_i z|| \ll N$ pour $i = 1, 2$. Donc le théorème (4) implique $l \leq 2$ (absurde). □

Démonstration: [Preuve du théorème 4]
On peut faire les deux suppositions suivantes :

$$\max_{1 \leq i \leq d} \rho_i < \frac{\rho_1 + ... + \rho_d + l}{d} \tag{25}$$

$$\max_{1 \leq i \leq d} \rho_i < l \tag{26}$$

On peut supposer (25) car ; supposons par exemple que l'on ait $\rho_d \geq \frac{\rho_1 + ... + \rho_d + l}{d}$, c-à-d $\rho_d \geq \frac{\rho_1 + ... + \rho_{d-1} + l}{d-1}$. Si la conclusion du théorème était fausse, on aurait $l > \frac{\rho_1 + ... + \rho_d}{d-1}$ donc $l > \frac{\rho_1 + ... + \rho_{d-1}}{d-1} + \frac{\rho_1 + ... + \rho_{d-1} + l}{(d-1)^2}$, d'où $d > 2$ et $l > \frac{\rho_1 + ... + \rho_{d-1}}{d-2}$. Ainsi, il suffit qu'on démontre le théorème pour les fonctions $f_1, ... f_{d-1}$. Donc on voit que par récurrence, on peut se débarrasser de la fonction dont l'ordre empêche la réalisation de (25). On peut aussi supposer (26), car dans le cas contraire le théorème devient immédiat avec la supposition

(25). En fait, si $\max \rho_i \geq l$ alors par (25) $(d-1)\max \rho_i < \frac{\rho_1+...+\rho_d}{d}$. Mais $d \geq 2$ ce qui implique $l < \frac{\rho_1+...+\rho_d}{d}$ d'où le théorème.
L'hypothèse $card(S_N) \gg N^l$ pour $N \to \infty$ implique $\exists C > 0$ tel que $card(S_N) \geq CN^l$ pour tout N suffisamment grand. On peut aussi supposer que $S_N \subset S_{N+1}$ en considérant $S_N = T_1 \cup ... \cup T_N$ où les T_k sont des sous-ensembles convenables de S_k. On pose $\delta = [K : \mathbb{Q}]$ et note $\rho = \frac{\rho_1+...+\rho_d}{d}$.
Maintenant supposons par l'absurde que $l > \frac{\rho_1+...+\rho_d}{d-1}$. Alors d'après les notations ci-dessus

$$l > \rho + \frac{l}{d} \tag{27}$$

On suppose pour la suite que N est assez grand pour vérifier les majorations que l'on va faire. La suite de la preuve se fait en quatre étapes et chaque étape suit le schéma des étapes de la méthode de Schneider. Dans la première étape on montre, l'existence d'une fonction F_N qui a de nombreux zéros, puis dans la deuxième étape on cherche un entier $M \geq N$ tel que sur l'ensemble S_M, F_N vaut 0 et qu'il existe $z_0 \in S_{M+1}$ avec $\gamma_N := F_N(z_0) \neq 0$ et la contradiction est obtenue en majorant et minorant cette valeur non nulle dans les troisième et quatrième étapes.

Etape 1 :

Dans cette étape, on veut construire un polynôme non nul $P_N \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_d]$ de degré inférieur ou égale à $R_i = R_i(N) = [(2\delta(C+1))^{\frac{1}{d}} N^{\rho+\frac{l}{d}-\rho_i}]$ par rapport à X_i et de taille majorée par $N^{\rho+\frac{l}{d}}$ tel que la fonction $F_N = P_N(f_1, ..., f_d)$ vérifie $F_N(z) = 0$ pour tout $z \in S_N$. Écrivons le polynôme inconnu sous la forme

$$P_N(X_1, ..., X_d) = \sum_{\lambda_1=0}^{R_1} ... \sum_{\lambda_d=0}^{R_d} p_N(\lambda_1, ..., \lambda_d) X_1^{\lambda_1} ... X_d^{\lambda_d}$$

avec $p_N(\lambda_1, ..., \lambda_d) \in \mathbb{Z}$. On considère le système d'équations en $p_N(\lambda_1, ..., \lambda_d)$ et de coefficients dans I_K

$$\partial_1(z)^{R_1} ... \partial_d(z)^{R_d} F_N(z) = 0 \text{ pour } z \in S_N$$

où les $\partial_i(z)$ sont les dénominateurs de $f_i(z)$. Si on écrit ce système en détail, on a

$$\partial_1(z)^{R_1} ... \partial_d(z)^{R_d} F_N(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{R_1} ... \sum_{\lambda_d=0}^{R_d} p_N(\lambda_1, ..., \lambda_d) \prod_{i=1}^{d} \partial_i(z)^{R_i-\lambda_i} \prod_{i=1}^{d} (\partial_i(z) f_i(z))^{\lambda_i}$$

alors ce système possède : $(R_1+1)...(R_d+1)$ inconnus et $card(S_N)$ équations. Or $R_i \geq (2\delta(C+1))^{\frac{1}{d}} N^{\rho+\frac{l}{d}-\rho_i}$ ce qui implique $(R_1+1)...(R_d+1) \geq 2\delta(C+1)N^l$. D'autre part, $cardS_N \geq CN^l$ et pour N assez grand on a aussi $cardS_N \leq 2\delta(C+1)N^l$. Donc le nombre des inconnus est plus grand que le nombre des équations. Pour pouvoir appliquer le lemme de Siegel, il faut aussi montrer que la taille des coefficients est

bornée, alors calculons maintenant la taille des coefficients de ce système, noté $coeff$, où $coeff := \prod_{i=1}^{d} \partial_i(z)^{R_i-\lambda_i} \prod_{i=1}^{d} (\partial_i(z) f_i(z))^{\lambda_i}$.

$$\begin{aligned}\log(||coeff||) &= \sum_{i=1}^{d} (R_i - \lambda_i) \log|\partial_i(z)| + \lambda_i(\log|\partial_i(z)| + ||f_i(z)||) \\ &\leq \max_{z \in S_N} \sum_{i=1}^{d} R_i(\log|\partial_i(z)| + ||f_i(z)||)\end{aligned}$$

Or, par hypothèse $\max_{z \in S_N} t(f_i(z)) \ll N^{\rho_i}$, d'où $t(coeff) \ll \sum_{i=1}^{d} R_i N^{\rho_i} \ll N^{\rho + \frac{l}{d}}$. Alors le lemme de Siegel nous montre qu'il existe des entiers rationnels $p_N(\lambda_1, ..., \lambda_d)$ non tous nuls tel que $t(p_N(\lambda_1, ..., \lambda_d)) \ll N^{\rho + \frac{l}{d}}$ et que $F_N(z) = 0$ pour tout $z \in S_N$.

Etape 2 :

Comme $P_N \neq 0$ et les fonctions $f_1, ..., f_d$ sont algébriquements indépendants, F_N construite dans l'étape 1, n'est pas identiquement nulle. F_N est entière d'ordre inférieur ou égale à $\max \rho_i$. Donc le lemme (3) implique, les valeurs de F_N ne sont pas toutes nulles. Alors avec l'étape 1, prenons l'entier M tel que

$$\forall z \in S_M \quad F_N(z) = 0 \text{ et } \exists z_0 \in S_{M+1} \text{ tel que } \gamma_N := F_N(z_0) \neq 0$$

d'où il est clair que $M \geq N$.

Etape 3 :[Majoration de $|\gamma_N|$]

On remarque d'après la fin de l'étape 2 que, la fonction $F_N(z) \prod_{t \in S_M} (z-t)^{-1}$ est entière. On lui applique le principe de maximum sur le disque $|z| \leq R := M \log M$ et on obtient

$$|\gamma_N| = |F_N(z_0)| \leq |F_N|_R \sup_{|z|=R} \prod_{t \in S_M} |\frac{z_0 - t}{z - t}|$$

Or l'ordre de F_N est $\max \rho_i$ d'où $\log |F_N|_R \ll R^{\max \rho_i} \ll M^l$ (car $l > \max \rho_i$). D'autre part, on majore $|\frac{z_0-t}{z-t}|$ par $\frac{2M+1}{R-M}$ alors

$$\begin{aligned}&\sup_{|z|=R} \prod_{t \in S_M} |\frac{z_0 - t}{z - t}| \leq (\frac{2M+1}{R-M})^{card(S_M)} \leq (\frac{3}{\log M})^{CM^l} \\ &\Rightarrow \log \sup_{|z|=R} \prod_{t \in S_M} |\frac{z_0 - t}{z - t}| \leq CM^l(\log 3 - \log(\log M))\end{aligned}$$

D'où

$$\log|\gamma_N| \leq M^l(1 + C \log 3 - \log(\log M)) \leq -M^l$$

Etape 4 :[Minoration de $|\gamma_N|$]

D'après le lemme d'inégalité de taille pour minorer γ_N, il suffit de majorer la taille de γ_N. On remarque que $\partial(z_0) := \partial_1(z_0)^{R_1} ... \partial_d(z_0)^{R_d}$ est le dénominateur de γ_N. Comme

$\log|\partial_i(z_0)| \ll M^{\rho_i}$, $\log|\partial(z_0)| \ll M^{\max\rho_i}$.
De l'autre côté,

$$||\gamma_N|| \leq \sum_{\lambda_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{\lambda_d=0}^{R_d} |p_N(\lambda_1, .., \lambda_d)| \prod_{i=1}^{d} ||f_i(z_0)||^{R_i}$$

$$\Rightarrow \log(||\gamma_N||) \leq \sum_{i=1}^{d} \log(R_i+1) + N^{\rho+\frac{l}{d}} + \sum_{i=1}^{d} R_i N^{\rho_i} \ll \sum_{i=1}^{d} R_i N^{\rho_i} \ll M^{\rho+\frac{l}{d}}$$

Comme $l > \max\rho_i$ et $l > \rho + \frac{l}{d}$, on a $t(\gamma_N) \ll M^{\rho+\frac{l}{d}}$.

Conclusion :
D'où le lemme d'inégalité de taille implique $-2\delta M^{\rho+\frac{l}{d}} \leq -M^l$,
donc $M^l \leq 2\delta M^{\rho+\frac{l}{d}}$(absurde).

□

3.5 Comparaison des deux méthodes

Bien que les deux méthodes diffèrent sur quelques points, on peux aussi parler d'un schéma de preuve ayant des points communs et qui consiste chacune de quatre étapes.

Méthode de Gel'fond :

Hypothèse : On suppose par l'absurde que b, e^l, e^{lb} sont algébriques et on utilise l'indépendance algébrique de e^z, e^{bz}.

Etape1 : Construire une fonction auxiliaire F non nulle ayant de zéros d'ordres élevés.
Les fonctions e^z et e^{bz} et leurs dérivées prennent des valeurs algébriques dans le corps du nombre $K = \mathbb{Q}(b, e^l, e^{bl})$ de degré D aux points de l'ensemble $S = \{z = jl | 0 \leq j \leq D+1\}$. Donc grâce au lemme de Siegel, on peut construire une fonction $F(z) = \sum_{\lambda_1}\sum_{\lambda_2} p(\lambda_1, \lambda_2) e^{\lambda_1 z} e^{\lambda_2 lz}$ avec les coefficients $p(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}$ non tous nuls tel que ses N dérivés premiers s'annulent sur S.

Etape2 : Choisir $z_0 \in S$ et M un entier tel que

$$\gamma_N = \frac{d^M}{dz^M} f(z_0) \neq 0$$

Un tel couple existe par le lemme (3) car $n(f, R) \ll R$.

Etape 3 : Majoration de $|\gamma_N|$
Cette majoration est faite par le lemme de Schwarz.(outil analytique)

Etape 4 : Minoration de $|\gamma_N|$
On utilise pour cela le lemme d'inégalité de taille qui est un outil arithmétique.

Conclusion : De l'étape 3 et 4, on abouti à une contradiction qui nous dit que la valeur non nulle de l'étape 2 n'existe pas. On constate donc que toutes les dérivées de F sont nulles et par le lemme de Schwarz, $F \equiv 0$. Ce qui contredit l'hypothèse de l'indépendance de e^l, e^{bl}.

Quant à la méthode de Schneider, par rapport au schéma de la preuve pour Gel'fond, il suffit de modifier l'hypothèse et les deux premières étapes de la manière suivante.

Méthode de Schneider :

Hypothèse : On suppose encore par l'absurde que b, e^l, e^{bl} sont algébriques et cette fois on utilise l'indépendance algébrique de z et e^{zl}

Etape 1 : On construit une fonction F non identiquement nulle, ayant de nombreux zéros. Les fonctions z et e^{bz} prennent des valeurs algébriques dans le corps du nombre $K = \mathbb{Q}(b, e^l, e^{bl})$ de degré D aux points de l'ensemble $S_N = \{i + jb | 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N\} \subset \mathbb{Z} \bigoplus b\mathbb{Z}$ de cardinalité N^2. Donc grâce au lemme de Siegel, on peut construire une fonction $F(z) = \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} p(\lambda_1, \lambda_2) z^{\lambda_1} e^{zl\lambda_2}$ tel que $p(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}$ non tous nuls et tel que F s'annule sur S_N.

Etape 2 : Choisir $z_0 \in S_N$ tel que $\gamma_N = f(z_0) \neq 0$.
Un tel z_0 existe par le lemme (3) car $n(f, R) \ll R$.

Conclusion : Les estimations des étapes 3 et 4 sont contradictoires.

4 Théorème de Baker

Nous allons dans ce chapitre voir le théorème de Baker prouvé en 1966 par Alan Baker et qui généralise le théorème de Gel'fond-Schneider. La méthode utilisée pour le démontrer est aussi la généralisation de la méthode de Gel'fond. Mais avant de commencer, nous allons donner dans le paragraph suivant un théorème qui va servir dans la démonstration du théorème de Baker pour contrôler le nombre de zéros de la fonction en question.

4.1 Le Lemme de Zéros

A la fin du chapitre précédente nous avons vu les analogies et les differences entre les méthodes de Gel'fond et Schneider. Même si la technique est différente pour la deuxième étape de ces deux méthodes, le but est le même : trouver une valeur non nulle de la fonction en question. Comme la méthode de Baker est la généralisation de Gel'fond, à l'étape 2 on se pose la même question et on trouve la solution par le lemme de zéros, prouvé par Gel'fond en 1949.

Soit F une fonction telle que

$$F(z) = \sum_{k=1}^{l} P_k(z) e^{w_k z}$$

avec w_k nombres complexes deux à deux distincts, $P_k \in \mathbb{C}[X]$. Pourqu'une telle fonction ne soit pas identiquement nulle, il suffit que les P_k ne soient pas tous nuls. On cherche dans ce cas à majorer le nombre de zéros de F dans $|z| \leq \rho$.

Théorème 5 (Lemme des zéros). *Soient $p_1, ..., p_l$ des nombres entiers positifs, $b_{k,j}$ $(1 \leq j \leq p_k), (1 \leq k \leq l)$ des nombres complexes non tous nuls, $w_1, ..., w_l$ des nombres complexes deux à deux distincts et $\rho > 0$ un nombre réel. On note $\Omega = \max_{1 \leq k \leq l} |w_k|$ et $n = \sum_{k=1}^{l} p_k$. Alors, le nombre $n(F, \rho)$ de zéros dans le disque $|z| \leq \rho$ de la fonction*

$$z \mapsto F(z) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{p^k} b_{k,j} z^{j-1} e^{w_k z}$$

est majorée par $2(n-1) + 5\rho\Omega$.

Avant de passer à la preuve on va donner deux autres lemmes auxiliaries.

Lemme 6. *Soient R_1, R_2, ρ 3 nombres réels vérifiant $R_2 > R_1 > 0$ et $R_2 \geq \rho$. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque fermé $|z| \leq R_2$. Si f n'est pas identiquement nulle dans le disque $|z| \leq R_2$ alors le nombre $n(f, \rho)$ vérifie*

$$n(f, \rho) \log \left(\frac{R_2^2 - R_1 \rho}{R_2 (R_1 + \rho)} \right) \leq \log \frac{|f|_{R_2}}{|f|_{R_1}}$$

Démonstration: On note $z_1, ..., z_\sigma$ les zéros de f dans le disque $|z| \leq \rho$ avec $\sigma = n(f, \rho)$. La démonstration repose essentiellement sur le produit de Blaschke. On rappel que, si $z_1, ..., z_\sigma$ les zéros de f dans le disque unité alors

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\sigma} = \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z} \frac{-\overline{z_j}}{|z_j|}$$

s'appelle le produit de Blaschke et il vérifie $|B|_1 = 1$ et si g est une fonction telle que $f(z) = B(z)g(z)$ dans le disque unité et $g(z) \neq 0$ pour tout z dans le disque unité alors g est holomorphe dans le disque unité. Donc, d'après ces rappels on constate immédiatement que la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{\sigma} \frac{R_2^2 - z\overline{z_j}}{R_2(z - z_j)}$$

est holomorphe dans un ouvert contenant $|z| \leq R_2$. Alors on peut appliquer le principe de maximum à g et on obtient $|g|_{R_1} \leq |g|_{R_2}$. Or $|g|_{R_2} = |f|_{R_2}$ (car $|B|_{R_2} = 1$) et $|g|_{R_1} \geq |f|_{R_1} (\frac{R_2 - R_1\rho}{R_2(R_1+\rho)})^\sigma$. D'où le résultat. □

Lemme 7. *Avec les mêmes notations que (5), il existe unique polynôme* $P = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{i-1} \in \mathbb{C}[X]$ *de degré inférieur à* n *vérifiant*

$$\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} P(w_k) = [\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}(e^{uz})]_{z=w_k} \quad (1 \leq j \leq p_k) \quad (1 \leq k \leq l)$$
$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)!|a_i| \leq e^{\Omega(|u|+1)} \sum_{i=1}^{n} |u|^{i-1}$$

Démonstration: [Lemme des zéros] Avec les hypothèses et les notations du théorème (5), le lemme (7) implique l'existence du polynôme $P(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i z^{i-1}$ vérifiant

$$\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} P(w_k) = [\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}(e^{uz})]_{z=w_k} = u^{j-1} e^{w_k z} \tag{28}$$

pour tout $(1 \leq j \leq p_k)$, $(1 \leq k \leq l)$. Pour utiliser le lemme (6), nous allons majorer $|F(z)|$. Pour cela, nous allons démontrer la relation

$$F(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} F(0) \tag{29}$$

En utilisant la propriété particulière suivante de la fonction exponentielle :

$$[\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}(z^{j-1} e^{w_k z})]_{z=0} = [\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}(z^{i-1})]_{z=w_k}$$

pour tout $1 \leq j \leq p_k$, $1 \leq k \leq l$, $1 \leq i \leq n$ on a,

$$\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}F(0) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_k} b_{k,j}[\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}(z^{j-1}e^{w_k z})]_{z=0} = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_k} b_{k,j}[\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}]_{z=w_k} \tag{30}$$

D'autre part, par l'équation (28),

$$F(u) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_k} b_{k,j}[\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}P(z)]_{z=w_k} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_k} b_{k,j}[\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}(z^{i-1})]_{z=w_k} \tag{31}$$

On déduit donc (29) de (30) et (31). Par le lemme (7), on majore les $|a_i|$ et cette majoration nous donne celle de F qui est

$$|F(u)| \leq e^{\Omega(|u|+1)} \sum_{i=1}^{n} |u|^{i-1} \max_{1\leq g\leq n} \frac{1}{(g-1)!}|\frac{d^{g-1}}{dz^{g-1}}F(0)| \tag{32}$$

Soit $R_1 > 0$. D'après (32), pour tout $u \in \mathbb{C}$, on a

$$|F(R_1 u)| \leq e^{R_1\Omega(|u|+1)} \sum_{i=1}^{n} |u|^{i-1} \max_{1\leq g\leq n} \frac{R_1^{g-1}}{(g-1)!}|\frac{d^{g-1}}{dz^{g-1}}F(0)|$$

Donc l'inégalité de Cauchy implique

$$|F(R_1 u)| \leq e^{R_1\Omega(|u|+1)} \sum_{i=1}^{n} |u|^{i-1}|F|_{R_1} \quad \forall u \in \mathbb{C}$$

Si on prend $R_2 = |u|R_1$, on a pour tout $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$

$$|F|_{R_2} \leq e^{\Omega(R_1+R_2)} \sum_{i=1}^{n} (\frac{R_2}{R_1})^{i-1}|F|_{R_1}$$

$$\Rightarrow \log\frac{|F|_{R_2}}{|F|_{R_1}} \leq (R_1+R_2)\Omega + \log\frac{R_2^n - R_1^n}{R_1^{n-1}(R_2-R_1)}$$

On choisit $R_2 > R_1$ et on majore

$$\log\frac{R_2^n - R_1^n}{R_1^{n-1}(R_2-R_1)} \text{ par } (n-1)\log\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2-R_1}$$

Alors le lemme (6) implique

$$n(F,\rho)\log\frac{R_2^2 - R_1\rho}{R_2(R_1+\rho)} \leq \log\frac{|F|_{R_2}}{|F|_{R_1}} \leq (n-1)\log\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2-R_1} + (R_1+R_2)\Omega$$

pour tout $R_1 > 0$, $R_2 > R_1$, $R_2 \geq \rho$. En posant $\gamma = \frac{R_2}{R_1}$ et $\mu = \frac{R_2^2 - R_1\rho}{R_2(R_1+\rho)}$ on a $R_1 = \rho\frac{1+\gamma\mu}{\gamma(\gamma-\mu)}$ et on obtient un résultat beaucoup plus général que celui qui a été énoncé

$$\forall \gamma, \mu \in \mathbb{R} \text{ tels que } \gamma > \mu > 0 \text{ et } \gamma > 1 \text{ on a}$$
$$n(F,\rho) \leq \frac{1}{\log \mu}((n-1)\log\gamma + \frac{(\gamma\mu+1)(\gamma+1)}{\gamma(\gamma-\mu)}\rho\Omega + \frac{1}{\gamma-1})$$

et pour obtenir le résultat énoncé, il faut choisir, $\gamma = 18$ et $\mu = \frac{9}{2}$. □

4.2 Théorème de Baker

Théorème 6. *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des nombres algébriques tels que $\log\alpha_1, ..., \log\alpha_n$ sont linéairements indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors $\log\alpha_1, ..., \log\alpha_n$ sont linéairements indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Remarque 8. *Pour $n = 2$, on trouve le théorème de Gel'fond-Schneider.*

Démonstration: [Théorème de Baker] Nous allons raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe (β_0, β_1,...,β_n) nombres algébriques non tous nuls tels que

$$\beta_0 + \beta_1\log\alpha_1 + ... + \beta_n\log\alpha_n = 0 \tag{33}$$

Sans perdre la généralité, on peut supposer que $\beta_n \neq 0$. En divisant (33) par β_n on a

$$\beta_0' + \beta_1'\log\alpha_1 + ... + \beta_n'\log\alpha_n = 0$$

avec $\beta_i' = \frac{\beta_i}{\beta_n}$. Encore une fois, sans perdre la généralité on peut supposer que $\beta_n = -1$ et puis on obtient

$$\beta_0 + \beta_1\log\alpha_1 + ... + \beta_{n-1}\log\alpha_{n-1} = \log\alpha_n \tag{34}$$

Pour la suite de la preuve on va noter $\log\alpha_i = l_i$. Alors $K = \mathbb{Q}(e^{l_1}, ..., e^{l_n}, \beta_0, ..., \beta_{n-1})$ est un corps de nombre de degré δ.

Etape 1 :

Nous voulons montrer qu'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X_0, X_1, .., X_n]$ de degré strictement inférieur à $2\delta N^{2n}$ pour X_0 et de degré strictement inférieur à N^{2n-1} pour X_i $(1 \leq i \leq n)$ et de taille inférieur ou égale à $N^{3n-1}\log N$ tel que la fonction $F(z) = P(z, e^{l_1 z}, ..., e^{l_n z})$ vérifie $\frac{d^s}{dz^s}F(z) = 0$ pour $1 \leq z \leq N^n$ et $s = \sigma_0 + ... + \sigma_{n-1} \leq N^{2n}$ où N est un entier assez grand divisible par 4^n.

Considérons le polynôme inconnu $P \in \mathbb{Z}[X_0, X_1, .., X_n]$ sous la forme

$$P(X_0, .., X_n) = \sum_{0\leq\lambda_0<2\delta N^{2n}} ... \sum_{0\leq\lambda_n N^{2n-1}} p(\lambda_0, ..., \lambda_n)X_0^{\lambda_0}...X_n^{\lambda_n}$$

Alors notre fonction s'écrit

$$F(z) = \sum_{0\leq\lambda_0<2\delta N^{2n}} ... \sum_{0\leq\lambda_n<N^{2n-1}} p(\lambda_0, ..., \lambda_n)z^{\lambda_0}exp[(\lambda_1 l_1 + ... + \lambda_n l_n)z]$$

Or (34) implique

$$F(z) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) z^{\lambda_0} \exp\left[(\lambda_n \beta_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i + \beta_i \lambda_n) l_i) z\right]$$

A partir de cette formule, on calcule les dérivées de F. D'où

$$\frac{d^s}{dz^s} F(z) = \sum_{\sigma_0 + .. + \sigma_{n-1} = s} \frac{s!}{\sigma_0! .. \sigma_{n-1}!} l_1^{\sigma_1} ... l_{n-1}^{\sigma_{n-1}} F_{\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}}(z) \quad \text{tel que} \tag{35}$$

$$F_{\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}}(z) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) \frac{d^{\sigma_0}}{dz^{\sigma_0}} (z^{\lambda_0} e^{\lambda_n \beta_0 z}) \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i + \lambda_n \beta_i)^{\sigma_i} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_n \beta_i) l_i z\right) \tag{36}$$

Donc, notre but revient à trouver des entiers $p(\lambda)$ non tous nuls tels que $\frac{d^s}{dz^s} F(z) = 0$ pour z et s appropriés. Mais pour annuler $\frac{d^s}{dz^s} F(z)$ il suffit d'annuler $F_{\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}}(z)$ où $\sigma_0 + ... + \sigma_{n-1} = s$. Si on note ∂ le dénominateur commun de $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_0, ..., \beta_{n-1}$ alors $\partial^{N^{2n} + nN^{3n-1}} F_{\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}}(z)$ a des coefficients dans I_K et on cherche les entiers $p(\lambda)$ tels que $\partial^{N^{2n} + nN^{3n-1}} F_{\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}}(z) = 0$ pour $1 \leq z \leq N^n$ et $s = \sigma_0 + ... + \sigma_{n-1} \leq N^{2n}$. Ainsi on obtient un système linéaire de moins de $2\delta N^{2n^2+n}$ inconnus et moins de N^{2n^2+n} équations. Alors $\frac{N^{2n^2+n}}{(2\delta - 1) N^{2n^2+n}} \leq 1$. Pour pouvoir appliquer le lemme de Siegel, il reste à majorer la taille des coefficients de $F_{\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}}(z)$. Comme ils sont sous la forme

$$coeff := \underbrace{\sum_{\mu=0}^{\sigma_0} \left(\binom{\sigma_0}{\mu} \frac{\lambda_0!}{(\lambda_0 - \mu)!} (\beta_0 \lambda_n)^{\sigma_0 - \mu} z^{\lambda_0 - \mu} \right)} \underbrace{\prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_j + \lambda_n \beta_j)^{\sigma_j}} \underbrace{e^{(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i l_i) z}} \tag{37}$$

d'où le premier crochet est majoré par $c_1 N^{N^{2n}}$, le deuxième est majoré par $c_2 N$ et le troisième est par $c_3 e^{N^{3n-1}}$ avec c_1, c_2, c_3 des réels positifs suffisamment grand. Quant au dénominateur, il est aussi majoré par $c_4^{N^{2n} + nN^{3n-1}}$ où c_4 est un réel suffisamment grand. Alors $t(coeff) \ll N^{3n-1} + N^{2n} \log N$. Donc d'après le lemme de Siegel, il existe des entiers $p(\lambda)$ tels que $t(p(\lambda)) \ll N^{3n-1} \log N$.

Etape 2 :

Comme les $p(\lambda)$ ne sont pas tous nuls et les l_i sont $\mathbb{Q}$-linéairements indépendants, la fonction $F(z)$ ainsi construite est non nulle. Alors d'après le théorème (5), le nombres de zéros de F dans le disque $|z| \leq N^{2n^2+n}$ est inférieur à $4\delta N^{2n^2+n} + 5N^{2n^2+n} N^{2n-1} (|l_1| + ... + |l_n|)$ ce qui est strictement inférieur à $2^{-4n^2} N^{2n^2+3n}$ pour N suffisamment grand. Par conséquent, les nombres $\frac{d^s}{dx^s} F(x)$ pour $1 \leq x \leq N^{2n^2+n}$ et $0 \leq s < 2^{-4n^2} N^{2n}$ ne sont pas tous nuls. Donc il existe un entier l, $1 \leq l \leq 4n^2$ tel que les nombres $\frac{d^s}{dx^s} F(x)$ pour $1 \leq x \leq N^{\frac{l}{2}+n}$ et $0 \leq s < 2^{-l} N^{2n}$ ne sont pas tous nuls. On choisit pour l le plus petit de ces entiers et on note $\gamma_N = F_{\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}}(x)$ un de ces nombres non nuls avec $1 \leq x \leq N^{\frac{l}{2}+n}$ et $\sigma_0 + ... + \sigma_{n-1} < 2^{-l} N^{2n}$.

Etape 3 :[Majoration de γ_N]

Avant de commencer à cet étape, on remarque que si $\mu_0 + ... + \mu_{n-1} = u$ tel que $u \leq 2^{-l}N^{2n}$ alors $\mu_0 + \sigma_0 + ... + \mu_{n-1} + \sigma_{n-1} \leq 2^{-l+1}N^{2n}$, d'où d'après la fin de l'étape 2, $F_{\mu_0+\sigma_0,...,\mu_{n-1}+\sigma_{n-1}}(y) = 0$ pour tout $1 \leq y \leq N^{n+\frac{l-1}{2}}$. Or

$$\frac{d^u}{dy^u}F_{\sigma_0,...,\sigma_{n-1}}(y) = \sum_{\mu_0+...+\mu_{n-1}=u} \frac{u!}{\mu_0!...\mu_{n-1}!} l_1^{\mu_1}...l_{n-1}^{\mu_{n-1}} F_{\mu_0+\sigma_0,...,\mu_{n-1}+\sigma_{n-1}}(y)$$

Donc les y tels que $1 \leq y \leq N^{n+\frac{l-1}{2}}$ sont des racines de $F_{\sigma_0,...,\sigma_{n-1}}$ d'ordre au moins $2^{-l}N^{2n}$. La difference du théorème de Baker est à ce point, car au lieu d'appliquer le principe de maximum à la fonction F elle-même, on l'applique à sa dérivée $F_{\sigma_0,...,\sigma_{n-1}}$. Prenons $R = N^{n+\frac{l}{2}+\frac{1}{4}}$ alors la fonction $F_{\sigma_0,...,\sigma_{n-1}}(x)(\prod_{y=1}^{N^{n+\frac{l-1}{2}}}(x-y)^{2^{-l}N^{2n}})^{-1}$ est analytique dans ce disque de rayon R. D'après le principe de maximum on a

$$|\gamma_N| = |F_{\sigma_0,..,\sigma_{n-1}}(x)| \leq \sup_{|z|=R} |F_{\sigma_0,...,\sigma_{n-1}}(z)| \sup_{|z|=R} \left(\prod_{y=1}^{N^{n+\frac{l-1}{2}}} |\frac{x-y}{z-y}|^{2^{-l}N^{2n}} \right)$$

Calculons ces deux bornes supérieures :
Pour la première, on sait que

$$F_{\sigma_0,..,\sigma_{n-1}}(z) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) \underbrace{\sum_{\mu=0}^{\sigma_0} \left(\binom{\sigma_0}{\mu} \frac{\lambda_0!}{(\lambda_0-\mu)!} (\beta_0\lambda_n)^{\sigma_0-\mu} z^{\lambda_0-\mu} \right) \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_j + \lambda_n\beta_j)^{\sigma_j} e^{(\sum_{i=1}^n \lambda_i l_i)z}}$$

On majore $|p(\lambda)|$ par $N^{N^{3n-1}}$ (obtenu par le lemme de Siegel dans la première étape) et le crochet par $e^{N^{3n+\frac{l}{2}+\frac{1}{4}}}$ pour N assez grand. D'où

$$\log |F_{\sigma_0,..,\sigma_{n-1}}|_R \ll N^{3n+\frac{l}{2}-\frac{3}{4}} \log N \ll N^{3n+\frac{l-1}{2}}$$

Quant à la deuxième, si on suppose que pour N assez grand

$$\log \sup_{|z|=R} |\frac{x-y}{z-y}| \leq \log N^{-1}$$

alors on obtient

$$\log \sup_{|z|=R} \left(\prod_{y=1}^{N^{n+\frac{l-1}{2}}} |\frac{x-y}{z-y}|^{2^{-l}N^{2n}} \right) \leq \frac{-1}{5} 2^{-l} N^{3n+\frac{l-1}{2}} \log N$$

D'où on obtient pour la majoration de $\log |\gamma_N|$:

$$\log \gamma_N \leq -N^{3n+\frac{l-1}{2}}$$

Etape 4 :[Minoration de $|\gamma_N|$]

Pour cette étape il suffit de majorer la taille de γ_N. D'après (36), les coefficients de γ_N sont de la forme (37). Comme $t(p(\gamma_N)) \ll N^{3n-1}\log N$ et $t(coeff) \ll N^{3n+\frac{l}{2}+\frac{1}{4}} + N^{2n}\log N$, $t(\gamma_N) \ll N^{3n+\frac{l}{2}-1}\log N$. D'où le lemme d'inégalité de taille implique

$$-2\delta N^{3n+\frac{l}{2}-1}\log N \leq \log|\gamma_N|$$

Conclusion :

Troisième et quatrième étapes impliquent

$$-2\delta N^{3n+\frac{l}{2}-1}\log N \leq \log|\gamma_N| \leq -N^{3n+\frac{l-1}{2}}$$

d'où on obtient $2\delta\log N \geq N^{\frac{1}{2}}$ ce qui est absurde pour N assez grand

□

4.3 Application

Voici quelques corollaires directs du théorème de Baker

Théorème 7. *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n$ nombres algébriques non nuls tel que $\beta_1\log\alpha_1 + ... + \beta_n\log\alpha_n \neq 0$, alors $\beta_1\log\alpha_1 + ... + \beta_n\log\alpha_n$ est transcendant.*

Démonstration: Soit β_0 un nombre algébrique non nul. Pour montrer le théorème il suffit de montrer que $\beta_0 + \beta_1\log\alpha_1 + ... + \beta_n\log\alpha_n \neq 0$ On raisonne par induction sur n.
Si $n = 0$; le théorème est démontré car $\beta_0 \neq 0$.
On suppose alors,

$$\forall m < n \quad \beta_0 + \beta_1\log\alpha_1 + ... + \beta_m\log\alpha_m \neq 0$$

Montrons le pour $m = n$.
Si $\log\alpha_1, ..., \log\alpha_n$ sont linéairements indépendants sur $\mathbb{Q}$ alors le théorème de Baker implique la conclusion.
Si $(\log\alpha_1, ..., \log\alpha_n)$ est une famille lié sur $\mathbb{Q}$ alors $\exists\varrho_1, .., \varrho_n$ rationnels non tous nuls tel que $\varrho_1\log\alpha_1 + ... + \varrho_n\log\alpha_n = 0$. Disons $\varrho_n \neq 0$, alors

$$\varrho_n(\beta_0 + \beta_1\log\alpha_1 + ... + \beta_n\log\alpha_n) = \varrho_n\beta_0 + \varrho_n\beta_1\log\alpha_1 + ... + \varrho_n\beta_n\log\alpha_n$$
$$\beta_n(\varrho_1\log\alpha_1 + ... + \varrho_n\log\alpha_n) = \varrho_1\beta_n\log\alpha_1 + ... + \varrho_n\beta_n\log\alpha_n = 0$$

Quand on fait la différence, on a

$$\varrho_n\beta_0 + (\varrho_n\beta_1 - \varrho_1\beta_n)\log\alpha_1 + ... + (\varrho_n\beta_{n-1} - \varrho_{n-1}\beta_n)\log\alpha_{n-1} = \varrho_n(\beta_0 + \beta_1\log\alpha_1 + ... + \beta_n\log\alpha_n)$$

Comme $\varrho_n\beta_0 \neq 0$ et par l'hypothèse de l'induction $\beta_0 + ... + \beta_n\log\alpha_n \neq 0$. □

Théorème 8. *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_0, ..., \beta_n$ les nombres algébriques non nuls alors $e^{\beta_0}\alpha_1^{\beta_1}...\alpha_n^{\beta_n}$ est transcendant.*

Démonstration: Supposons par l'absurde que, $e^{\beta_0}\alpha_1^{\beta_1}...\alpha_n^{\beta_n} = \alpha_{n+1}$ est algébrique. Alors

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + ... + \beta_n \log \alpha_n - \log \alpha_{n+1} = 0$$

ce qui contredit le théorème (7). □

Théorème 9. *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des nombres algébriques différents de 0 et 1 et soient $\beta_1, ..., \beta_n$ des nombres algébriques tels que $(1, \beta_1, ..., \beta_n)$ linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$. Alors $\alpha_1^{\beta_1}...\alpha_n^{\beta_n}$ est transcendant.*

Démonstration: D'après le théorème (7), il suffit de montrer que pour tout $\beta_1, ..., \beta_n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, $\beta_1 \log \alpha_1 + ... + \beta_n \log \alpha_n \neq 0$. Pour cela, on raisonne par induction.
$n = 1$; $\beta_1 \log \alpha_1 \neq 0$ car $\beta_1 \neq 0$ et $\alpha_1 \neq 1$.
On suppose alors

$$\forall m < n \quad \beta_1 \log \alpha_1 + ... + \beta_m \log \alpha_m \neq 0$$

Montrons le pour $m = n$
Si $\log \alpha_1, ..., \log \alpha_n$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ alors ils le sont sur $\overline{\mathbb{Q}}$ par le théorème de Baker.
Si $\log \alpha_1, ..., \log \alpha_n$ sont liés sur $\mathbb{Q}$ alors $\exists(\varrho_1, ..., \varrho_n)$ tous non nuls tels que $\varrho_1 \log \alpha_1 + ... + \varrho_n \log \alpha_n = 0$. Supposons $\varrho_n \neq 0$, alors

$$\varrho_n(\beta_1 \log \alpha_1 + ... + \beta_n \log \alpha_n) = \varrho_n\beta_1 \log \alpha_1 + ... + \varrho_n\beta_n \log \alpha_n$$
$$\beta_n(\varrho_1 \log \alpha_1 + ... + \varrho_n \log \alpha_n) = \beta_n\varrho_1 \log \alpha_1 + ... + \beta_n\varrho_n \log \alpha_n = 0$$

Quand on fait la différence, on obtient

$$(\varrho_n\beta_1 - \varrho_1\beta_n) \log \alpha_1 + ... + (\varrho_n\beta_{n-1} - \varrho_{n-1}\beta_n) \log \alpha_{n-1} = \varrho_n(\beta_1 \log \alpha_1 + ... + \beta_n \log \alpha_n)$$

Pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence il faut montrer que

$$(1, \varrho_n\beta_1 - \varrho_1\beta_n, ..., \varrho_n\beta_{n-1} - \varrho_{n-1}\beta n)$$

est une famille linéairement indépendante dans $\mathbb{Q}$. Soient alors $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{Q}$ tel que

$$a_0 + a_1(\varrho_n\beta_1 - \varrho_1\beta_n) + ... + a_{n-1}(\varrho_n\beta_{n-1} - \varrho_{n-1}\beta_n) = 0.$$

D'où

$$a_0 + a_1\varrho_n\beta_1 + ... + a_{n-1}\varrho_n\beta_{n-1} - (a_1\varrho_1 + ... + a_{n-1}\varrho_{n-1})\beta_n = 0.$$

Comme $1, \beta_1, ..., \beta_n$ sont linéairements independents sur $\mathbb{Q}$ et $\varrho_1, ..., \varrho_n$ ne sont pas tous nuls, on a $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$. Donc l'hypothèse de l'induction s'applique et

$$\beta_1 \log \alpha_1 + ... + \beta_n \log \alpha_n \neq 0.$$

□

5 Conclusion

Nous nous sommes intéressé dans ce mémoire à trois méthodes fondamentales de la théorie des nombres transcendants qui nous ont permit de faire un tour d'horizon assez complet des méthodes de transcendance : la méthode de Gel'fond, la méthode de Schneider et la méthode de Baker.

Après avoir présenté les méthodes de Gel'fond et de Schneider au chapitre 3, nous avons montré à la section 3.5 les resemblances entre ces deux méthodes, qui ont été faite indépendamment l'une de l'autre à l'origine en 1934. Les deux méthodes consistent de 4 étapes. Les outils utilisés pour la démonstration des étapes 1, 3 et 4 sont identiques. Pour la deuxième étape, Schneider s'est servi du lemme 3 pour dire qu'il existe une valeur non nulle quant à Gel'fond, il l'a fait en supposant par l'absurde.

Nous avons débuté le chapitre 4 par un lemme très important dans la théorie de nombres transcendants démontré par Gel'fond en 1949, le lemme de zéros. En effet, ce lemme nous permet de répondre au problème qui apparaît dans chaque méthode : trouver une valeur non nulle du polynôme exponentiel complexe. Ce lemme permet de définir un schéma général de preuve pour les méthodes de transcendance. En l'occurrence, on retrouve dans la démonstration de la méthode de Baker ce même schéma. Ce schéma est aussi composé de 4 étapes.

- A la première étape, on démontre l'existence d'un polynôme exponentiel complexe non-identiquement nul par *le lemme de Siegel.*
- La deuxième étape consiste à montrer l'existence d'une valeur non nulle de ce polynôme par *le lemme de zéros.*
- La troisième étape la majoration de cette valeur non nulle en utilisant *le lemme de Schwarz* est effectué (Outil analytique).
- Enfin, la dernière étape consiste à minorer cette valeur en utilisant *le lemme d'inégalité de taille* (Outil arithmétique).

Ces méthodes sont importantes, de part leur conséquences dans divers domaines de la théorie des nombres et il existe encore beaucoup de problèmes non résolues malgré la richesse de cette théorie.

Références

[1] A. Baker, Transcendental number theory. *Cambridge university press*, 1975.

[2] H. E. Rose, A course in number theory. *Oxford university press*, 1994.

[3] M. Waldschmidt, Transcendence methods. *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*, 1979.

[4] M. Waldschmidt, Nombres Transcendants 402. *Springer-Verlag*, 1974

[5] Ch. Hermit, Sur la fonction exponentielle, C.R. 77 , *Oeuvres III*, pp 150-181, 1873.

[6] D. Bertrand, M. Emsalem, F. Gramain, M. Huttner, M. Langevin, M. Laurent, M. Mignotte, J.-C. Moreau, P. Philipon, E. Reysat, M. Waldschmidt, Les nombres transcendants, *Mémoires de la S.M.F.* 2ième *série*, tome 13, pp 1-60, 1984.