Triplets spectraux en géométrie d'Arakelov

Caterina Consani*
Département de Mathématiques
Université de Toronto, Canada

Matilde Marcolli †
Max–Planck Institut für Mathematik
Bonn, Allemagne

Résumé Dans cette note nous employons la théorie des triplets spectraux de Connes pour rapprocher le model de Manin du graphe dual de la fibre à l'infini d'une surface d'Arakelov et la cohomologie du cône de la monodromie locale.

Spectral triples in Arakelov geometry

Abstract In this note, we use Connes' theory of spectral triples to provide a connection between Manin's model of the dual graph of the fiber at infinity of an Arakelov surface and the cohomology of the mapping cone of the local monodromy.

Abridged English version

In Arakelov theory a completion of an arithmetic surface is achieved by enlarging the group of divisors by formal linear combinations of the "closed fibers at infinity". Manin in [8] described the dual graph of any such closed fiber in terms of an infinite tangle of bounded geodesics in a hyperbolic handlebody $\mathfrak{X}_\Gamma = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$, uniformized by a Schottky group $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. In this note we consider arithmetic surfaces over the ring of integers in a number field, with fibers of genus $g \geq 2$. We use Connes' theory of spectral triples to relate the hyperbolic geometry of the handlebody to the cohomology of the cone of the local monodromy N at arithmetic infinity as introduced in [4]. First, we construct a spectral triple, where the non–commutative space is given by the reduced C^*–algebra of the Schottky group acting on the cohomology of the cone via a representation induced by the presence of a polarized Lefschetz module structure. In this setting we recover the alternating product of the archimedean factors from a zeta function of the spectral triple. Then, we introduce a second spectral triple, which is related to Manin's description of the dual graph of the fiber at infinity. Here the non–commutative space is a C^*–algebra representing the "reduction mod infinity" and acting on a "dynamical homology and cohomology" pair, defined in terms of the bounded geodesics in the handlebody and of a dynamical system T. The operator Φ, that represents the "logarithm of a Frobenius–type operator" on the archimedean cohomology of [7], gives the Dirac operator on these spectral triples. We show that the archimedean cohomology embeds in the dynamical cohomology, compatibly with the action of a real Frobenius $\bar{F}_\infty$, so that the duality isomorphism on the cohomology of the cone of N corresponds to the pairing of dynamical homology and cohomology.

A detailed version of the results presented in this note is contained in [5].

*Partiellement supportée par la bourse du NSERC numéro 72016789
†Partiellement supportée par la bourse Sofja Kovalevskaja de l'Humboldt Foundation

1 Introduction

En théorie d'Arakelov une complétion d'une surface arithmétique est réalisée par l'élargissement du groupe des diviseurs avec une combinaison linéaire formelle des "fibres fermées à l'infini". Dans [8], Manin a décrit le graphe dual d'une telle fibre fermée en employant un enlacement infini de géodésiques limitées dans une variété hyperbolique $\mathfrak{X}_\Gamma = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$, uniformisée par un groupe de Schottky $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Dans cette note nous considérons des surfaces arithmétiques définies sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres, avec des fibres de genre $g \geq 2$. Nous employons la théorie des triplets spectraux de Connes pour rapprocher la géométrie hyperbolique de la variété avec la cohomologie du cône de la monodromie locale N à l'infini aritmétique qui a été introduite dans [4]. D'abord, nous construisons un triplet spectral, où l'espace non–commutatif est donné par la C*–algèbre réduite du groupe de Schottky qui agit sur la cohomologie du cône à travers la représentation définie par la présence d'une structure de Lefschetz module polarisée. Dans ce cadre nous retrouvons le produit alterné des facteurs archimédiens d'une fonction zeta du triplet spectral. Puis, nous introduisons un deuxième triplet spectral, qui est lié à la description de Manin du graphe dual de la fibre à l'infini. Ici l'espace non–commutatif est une C*–algèbre qui représente la "réduction modulo infini" et qui agit sur un accouplement d' "homologie et cohomologie dynamique", définie avec les géodésiques limitées dans la variété hyperbolique et à travers l'usage d'un système dynamique T. L'operateur Φ, qui représente le "logarithme de Frobenius" sur la cohomologie archimédienne de [7], donne l'opérateur de Dirac sur ces triplet spectraux. Nous prouvons que la cohomologie archimédienne est plongée dans la cohomologie dynamique, de manière compatible avec l'action de Frobenius réelle $\bar{F}_\infty$, de sorte que l'isomorphisme de dualité sur la cohomologie du cône de N correspond à l'accouplement d'homologie et cohomologie dynamique.

Une version détaillée des résultats présentés dans cette note est contenue dans [5].

2 Résultats

Soit $X_{/\kappa}$ une courbe projective et lisse définie sur $\kappa = \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$. Pour $a,b \in \mathbb{N}$, nous notons $(A^{a,b} \oplus A^{b,a})_\mathbb{R}$ le groupe abélien des formes différentielles réelles (analytiques ou C$^\infty$) sur $X_{/\kappa}$ de type $(a,b)+(b,a)$.

Pour $p \in \mathbb{Z}$, l'expression $(A^{a,b} \oplus A^{b,a})_\mathbb{R}(p)$ signifie le p-ème Hodge-Tate twist de $(A^{a,b} \oplus A^{b,a})_\mathbb{R}$.

Soient $i,j,k \in \mathbb{Z}$; nous considérons le complexe suivant

$$K^{i,j,k} = \begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{\substack{a+b=j+1 \\ |a-b|\leq 2k-i}} (A^{a,b} \oplus A^{b,a})_\mathbb{R}\left(\frac{1+j-i}{2}\right) & \text{si } 1+j-i \equiv\ 0(2),\ k \geq \max(0,i) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Sur $K^{i,j,k}$ on définit les différentielles $d' : K^{i,j,k} \to K^{i+1,j+1,k+1}$ et $d'' : K^{i,j,k} \to K^{i+1,j+1,k}$, avec $d' = \partial + \overline{\partial}$ et $d'' = \sqrt{-1}(\overline{\partial} - \partial)$. Ceux-ci satisfont $d'^2 = 0 = d''^2$ (*voir* [4] Lemma 4.2). Nous considérons aussi les morphismes

$$N : K^{i,j,k} \to K^{i+2,j,k+1}, \quad N(f) = (2\pi\sqrt{-1})^{-1}f \ \text{ et } \ l : K^{i,j,k} \to K^{i,j+2,k}, \quad l(f) = (2\pi\sqrt{-1})f \wedge \omega,$$

où N peut être regardé comme le logarithme de la *monodromie locale à l'infini*, et l est l'*homomorphisme de Lefschetz*, avec ω la $(1,1)$-forme réelle fondamentale (fermée) sur $X_{/\kappa}$. Ces endomorphismes commutent avec d' et d'' et satisfont $[l,N]=0$ (*voir* [4]). On définit $K^{i,j} = \oplus_k K^{i,j,k}$ et on écrit $K^* = \oplus_{i+j=*}K^{i,j}$ pour indiquer le complexe simple doté de la différentielle total $d = d' + d''$ et avec l'action des opérateurs N et l.

Le complexe différentiel $K^{\cdot,\cdot}$ avec les opérateurs N et l est un *module de Lefschetz bigradué et polarisé*, avec la polarisation $\psi : K^{-i,-j,k} \otimes K^{i,j,k+i} \to \mathbb{R}(1)$ définie par

$$\psi(x,y) := \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)\epsilon(1-j)(-1)^k \int_{X_{/\kappa}(\mathbb{C})} x \wedge Cy.$$

Ici, pour $m \in \mathbb{Z}$: $\epsilon(m) := (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}$ et $C(x) := (\sqrt{-1})^{a-b}x$ est l'opérateur de Weil pour x une forme différentielle de type (a,b) (*voir* [13] §V.1). La forme bilinéaire

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : K \otimes K \to \mathbb{R}(1), \qquad \langle x, y\rangle := \psi\left(x, \sigma(\tilde{w})y\right) \tag{2.2}$$

est symétrique et définie positive (*voir* [4] Lemmas 4.2, 4.5, 4.6 et Proposition 4.7). La structure de module de Lefschetz bigraduée correspond à la représentation

$$\sigma : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(K^{\cdot,\cdot}) \tag{2.3}$$

$$\sigma\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}\right\}(x) = a^i b^j x \quad \text{où } x \in K^{i,j}$$

$$d\sigma\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, 0\right\} = N \quad d\sigma\left\{0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\} = l.$$

Nous considérons le cône de l'application N

$$\mathrm{Cone}(N)^{\cdot,\cdot} = \mathrm{Cone}(N : K^{\cdot,\cdot} \to K^{\cdot+2,\cdot}) := K^{\cdot,\cdot}[1] \oplus K^{\cdot+2,\cdot}, \quad D(a,b) = (-d(a), N(a) + d(b))$$

et l'hyper-cohomologie $H^q(X^*) := \mathbb{H}^q(\mathrm{Cone}(N)^\cdot)$. Ces groupes ont une structure gradué $H^q(X^*) = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} gr^{\mathrm{w}}_{2p} H^q(X^*)$ de la forme

$$H^0(X^*) = \oplus_{p\leq 0} H^0(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{R}(p)) \qquad H^1(X^*) = \oplus_{p\leq 0} H^1(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{R}(p)) \oplus \oplus_{p\geq 1} H^0(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{R}(p-1))$$
$$H^2(X^*) = \oplus_{p\leq 1} H^2(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{R}(p)) \oplus \oplus_{p\geq 2} H^1(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{R}(p-1)) \qquad H^3(X^*) = \oplus_{p\geq 2} H^2(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{R}(p-1)).$$

Quand $\kappa = \mathbb{R}$ on obtient des résultats similaires en prenant les invariants de la conjugaison de de Rham $\bar{F}_\infty$ (*voir* [5] §2.)

Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ un groupe de Schottky de rang $g \geq 2$. Soit $\tilde{\Gamma}$ le Γ-stabilisateur de chacune de deux composantes connexes en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus C$, où C est un quasi-cercle pour Γ (*voir* [1]). Nous considérons les deux groupes Fuchsiens de Schottky $G_i := \{\alpha_i\gamma\alpha_i^{-1} : \gamma \in \tilde{\Gamma}\}$, avec α_i les équivalences conformelles entre les deux composantes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus C$ et les deux hémisphères en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Après un relèvement de $\tilde{\Gamma}$ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, nous considérons la C^*–algèbre réelle, réduite $\mathrm{C}^*(\tilde{\Gamma})$.

Théorème 2.1 *Soit $\mathcal{X}$ une surface arithmétique avec fibres de dimension un et de genre $g \geq 2$. Soit Γ un groupe de Schottky qui fixe l'uniformisation de la surface de Riemann correspondante $X_{/\mathbb{C}}$ à une place archimédienne. Le produit* (2.2) *induit un produit intérieur sur $H^\cdot(X^*)$. La représentation $\sigma_2(\gamma) := \sigma\{1, \alpha_2\gamma\alpha_2^{-1}\}$, obtenue par une restriction de* (2.3) *sur le* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$*-relèvement du groupe Fuchsien G_2, induit une représentation de* $\mathrm{C}^*(\tilde{\Gamma})$ *sur la complétion de Hilbert de $H^q(X^*)$ avec le produit intérieur ci-dessus. Ces données, avec l'opérateur*

$$\Phi|_{gr^{w}_{2p}H^q(X^*)} := \begin{cases} p & q \geq 2p \\ p-1 & q \leq 2p-1, \end{cases}$$

déterminent un triplet spectral 1–sommable $(\mathrm{C}^*(\tilde{\Gamma}), H^\cdot(X^*), \Phi)$ *à la Connes (voir [3]).*

Sur les sous-espaces

$$H^-(X^*) := \oplus_{p\leq 0} gr^{\mathrm{w}}_{2p} H^0(X^*) \oplus \oplus_{p\leq 0} gr^{\mathrm{w}}_{2p} H^1(X^*) \oplus \oplus_{p\leq 1} gr^{\mathrm{w}}_{2p} H^2(X^*),$$

$$H^+(X^*) := \oplus_{p\geq 1} gr^{\mathrm{w}}_{2p} H^1(X^*) \oplus \oplus_{p\geq 2} gr^{\mathrm{w}}_{2p} H^2(X^*) \oplus \oplus_{p\geq 2} gr^{\mathrm{w}}_{2p} H^3(X^*),$$

on définit des isomorphismes de dualité $\delta = \oplus_{q=0}^{2}\delta_q$ qui sont produits par les puissances de la monodromie (*voir* [4], Proposition 4.8). L'opérateur

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{-1} \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$$

satisfait $\omega^2 = id$, $\omega^* = \omega$, $[\omega, a] = 0$, pour chaque $a \in C^*(\tilde{\Gamma})$, et $(\Phi\omega + \omega\Phi)|_{H^q(X^*)} = q \cdot id$. Par conséquent, nous considérons dans la famille de fonctions zeta associées au triplet spectral

$$\zeta_{a,P_-\Phi}(s,z) := \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(P_-\Phi)} \mathrm{Tr}(a\Pi(\lambda, P_-\Phi))(s-\lambda)^{-z}, \tag{2.4}$$

avec $a = \sigma_2(-id)$.

Théorème 2.2 *La fonction zeta* (2.4) *satisfait*

$$\exp\left(-\frac{d}{dz}\zeta_{a,P_-\Phi/(2\pi)}(s/(2\pi),z)|_{z=0}\right)^{-1} = \frac{L_{\mathbb{C}}(H^1(X_{/\mathbb{C}},\mathbb{C}),s)}{L_{\mathbb{C}}(H^0(X_{/\mathbb{C}},\mathbb{C}),s)\cdot L_{\mathbb{C}}(H^2(X_{/\mathbb{C}},\mathbb{C}),s)},$$

où $L_{\mathbb{C}}(H^q(X_{/\mathbb{C}},\mathbb{C}),s)$ *sont les facteurs* L *archimédiens définis en [12].*

Pour un choix d'un ensemble de générateurs $\{g_i\}_{i=1}^{g}$ du groupe de Schottky Γ, nous considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des *suites réduites et doublement infinies* dans les $\{g_i\}_{i=1}^{2g}$ $(g_{i+g} = g_i^{-1})$:

$$\mathcal{S} = \{\ldots a_{-m}\ldots a_{-1}a_0a_1\ldots a_\ell\ldots \;|a_i \in \{g_i\}_{i=1}^{2g},\; a_{i+1} \neq a_i, \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

L'*opérateur de décalage* T agit sur $\mathcal{S}$ comme

$$T(\ldots a_{-m}\ldots a_{-1}a_0a_1\ldots a_\ell\ldots) = \ldots a_{-m+1}\ldots a_0a_1a_2\ldots a_{\ell+1}\ldots$$

Le couple $(\mathcal{S},T)$ est un espace de Smale (*voir* [10]), et le tore de l'application T est défini comme $\mathcal{S}_T := \mathcal{S}\times[0,1]/(x,0)\sim(Tx,1)$.

Il y a une identification $H^1(\mathcal{S}_T,\mathbb{Z}) \cong K_0(C(\mathcal{S})\rtimes_T\mathbb{Z})$ sur la cohomologie de $\mathcal{S}_T$ avec le K_0-groupe de la C*-algèbre produit croisé pour l'action de T sur $\mathcal{S}$ (*voir* [2]). Ceci munit $H^1(\mathcal{S}_T,\mathbb{Z})$ d'une filtration de groupes commutatifs libres $F_0 \hookrightarrow F_1 \hookrightarrow \cdots F_n \hookrightarrow \cdots$, avec $\mathrm{rang}\, F_0 = 2g$ et $\mathrm{rang}\, F_n = 2g(2g-1)^{n-1}(2g-2)+1$, pour $n \geq 1$, de façon que $H^1(\mathcal{S}_T,\mathbb{Z}) = \lim_n F_n$ (*voir* [9]). Le groupe d'homologie $H_1(\mathcal{S}_T,\mathbb{Z})$ a une filtration de groupes commutatifs libres $\mathcal{K}_N$, de sorte que $H_1(\mathcal{S}_T,\mathbb{Z}) = \lim_N \mathcal{K}_N$, avec $\mathrm{rang}(\mathcal{K}_N) = (2g-1)^N+1$ pour N pair et $(2g-1)^N+(2g-1)$ pour N impair.

Définition 2.3 1. *Nous définissons la* cohomologie dynamique *comme*

$$H^1_{dyn} := \oplus_{p\leq 0} gr^\Gamma_{2p} H^1_{dyn}, \quad \text{où} \quad gr^\Gamma_{2p}H^1_{dyn} := \mathrm{Gr}_{-p}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}(p),$$

pour $\mathrm{Gr}_n = (F_n/F_{n-1})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. *Nous définissons le sous-espace gradué* $\mathcal{V} := \oplus_{p\leq 0} gr^\Gamma_{2p}\mathcal{V}$ *de* H^1_{dyn} *avec* $gr^\Gamma_{2p}\mathcal{V}$ *engendré par les éléments* $(2\pi\sqrt{-1})^p\chi_{-p+1,k}$, *pour* $\chi_{n,k} := [\chi_{\mathcal{S}^+(w_{n,k})}]$ *en* Gr_{n-1}.

2. *Nous définissons l'* homologie dynamique *comme*

$$H_1^{dyn} := \oplus_{p\geq 1} gr^\Gamma_{2p}H_1^{dyn}, \quad \text{où} \quad gr^\Gamma_{2p}H_1^{dyn} := \mathcal{K}_{p-1}\otimes\mathbb{R}(p).$$

Nous définissons aussi $\mathcal{W}\subset H_1^{dyn}$ *comme le sous-espace gradué* $\mathcal{W} = \oplus_{p\geq 1} gr^\Gamma_{2p}\mathcal{W}$, *où* $gr^\Gamma_{2p}\mathcal{W}$ *est engendré par les* $2g$ *éléments* $(2\pi\sqrt{-1})^p \underbrace{g_kg_k\ldots g_k}_{p-fois}$.

Il y a une involution (que nous notons encore $\bar{F}_\infty$) qui agit sur l'homologie et la cohomologie dynamiques et qui est induit par le changement d'orientation.

Théorème 2.4 *Il y a des isomorphismes $\bar{F}_\infty$-équivariants U et $\tilde{U}$, tels que le diagramme suivant soit commutatif (avec $p \leq 0$):*

$$\begin{tikzcd} gr^w_{2p} H^1(X^*) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "U"] & gr^w_{2(-p+2)} H^2(X^*) \arrow[d, "\tilde{U}"] \\ gr^\Gamma_{2p} \mathcal{V} \arrow[r, "\mathcal{D}"] & gr^\Gamma_{2(-p+1)} \mathcal{W}. \end{tikzcd}$$

Ici δ_1 est l'isomorphisme de dualité de [4] qui est induit par l'opérateur de monodromie N, et $\mathcal{D}$ est l'isomorphisme de dualité induit par l'accouplement d'homologie et cohomologie de $\mathcal{S}_T$.

L'algèbre de Cuntz–Krieger $\mathcal{O}_A$ (*voir* [6]), avec la matrice élémentaire A du sous-déplacement de type fini $(\mathcal{S}, T)$, satisfait $\mathcal{O}_A \cong \mathrm{C}(\Lambda_\Gamma) \rtimes \Gamma$, où $\Lambda_\Gamma \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est l'ensemble limite du groupe de Schottky Γ.

Les isométries génératrices S_i de $\mathcal{O}_A$ agissent sur F_n comme $(S_i h)(a_0 \dots a_n) = h(g_i^{-1} a_0 \dots a_{n-1}) \cdot \chi_{a_0 \neq g_i}(a_0 \dots a_n)$. Cela définit une action de la C*-algèbre (réelle) $\mathcal{O}_A$ sur une complétion de Hilbert appropriée de H^1_{dyn}. De plus, les fonctions $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{H}^3)$ définissent des opérateurs $(\tilde{\rho}(f)h)(a_0 \dots a_n) = f((a_0 \dots a_n) \cdot x_0) \cdot h(a_0 \dots a_n)$, avec $x_0 \in \mathbb{H}^3$ un point de base fixé. Ceci donne une représentation de $(\mathrm{C}(\Lambda_\Gamma) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{H}^3)) \rtimes \Gamma$ sur l'algèbre des opérateurs limités sur H^1_{dyn}.

Les fonctions $f \in \mathrm{C}_b(\mathbb{H}^3, \mathrm{C}(\Lambda_\Gamma))$ définissent des opérateurs $\tilde{\rho}(f)\, a_0 \dots a_p = f_{(a_0 \dots a_p)\, x_0}(\overline{a_0 \dots a_p}) \cdot a_0 \dots a_p$ sur la complétion de Hilbert de H_1^{dyn}. Cela induit une représentation de la C*-algèbre $\mathrm{C}_0(\mathfrak{X}_\Gamma, \mathcal{E})$ des sections du fibré $\mathcal{E} = (\mathrm{C}(\Lambda_\Gamma) \times \mathbb{H}^3)/\Gamma \longrightarrow \mathfrak{X}_\Gamma$, où Γ agit diagonalment sur $\mathrm{C}(\Lambda_\Gamma) \times \mathbb{H}^3$.

Nous considérons l'opérateur linéaire illimité $D : \mathcal{H}^1_{dyn} \oplus \mathcal{H}_1^{dyn} \to \mathcal{H}^1_{dyn} \oplus \mathcal{H}_1^{dyn}$ qui agit comme une multiplication par le poids $D : x \mapsto p \cdot x$, sur $gr^\Gamma_{2p} H^1_{dyn}$ avec $p \leq 0$ et sur $gr^\Gamma_{2p} H_1^{dyn}$ avec $p \geq 1$.

Théorème 2.5 *Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1_{dyn} \oplus \mathcal{M} \otimes_{\mathrm{C}_0(\mathfrak{X}_\Gamma, \mathcal{E})} \mathcal{H}_1^{dyn}$, où $\mathcal{M}$ est un bimodule réalisant l'équivalence de Morita entre les C*-algèbres $\mathrm{C}_0(\mathfrak{X}_\Gamma, \mathcal{E})$ et $\mathcal{A} := (\mathrm{C}(\Lambda_\Gamma) \otimes \mathrm{C}_0(\mathbb{H}^3)) \rtimes \Gamma$. Alors, $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \tilde{D})$ est un triplet spectral avec $\tilde{D}|_{\mathcal{H}^1_{dyn}} = D$ et $\tilde{D}|_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{H}_1^{dyn}} = 1 \otimes D$.*

References

[1] R. Bowen, *Hausdorff dimension of quasi–circles*, Publ.Math. IHES 50 (1979) 11–25.

[2] M. Boyle, D. Handelman, *Orbit equivalence, flow equivalence, and ordered cohomology*, Israel J. Math. 95 (1996) 169–210.

[3] A. Connes, *Geometry from the spectral point of view.* Lett. Math. Phys. 34 (1995), no. 3, 203–238.

[4] C. Consani, *Double complexes and Euler L–factors*, Compositio Math. 111 (1998) 323–358.

[5] C. Consani, M. Marcolli, *Non-commutative geometry, dynamics, and ∞-adic Arakelov geometry*, preprint math.AG/0205306. MPIM preprint (13) 2002.

[6] J. Cuntz, W. Krieger, *A class of C^*–algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. 56 (1980) 251–268.

[7] C. Deninger, *On the Γ–factors attached to motives*, Invent. Math. 104 (1991) 245–261.

[8] Yu.I. Manin, *Three–dimensional hyperbolic geometry as ∞–adic Arakelov geometry*, Invent. Math. 104 (1991) 223–244.

[9] W. Parry, S. Tuncel, *Classification problems in ergodic theory*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 67, 1982.

[10] I. Putnam, *C^*–algebras from Smale spaces*, Can. J. Math. 48 (1996) N.1 175–195.

[11] M. Saito, *Modules de Hodge Polarisable.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 24 (1988) 849–995.

[12] J. P. Serre, *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures).* Sém. Delange-Pisot-Poitou, exp. 19, 1969/70.

[13] R.O. Wells, *Differential analysis on complex manifolds.* Springer–Verlag, 1980.