Система Обыкновенниих Дифференциальних Уравнений

Антисамодвойственних Связностей и Монополей Дирака

Матилде Марколли

“ Надо снова научиться жить ”
(Анна Ахматова)

Проблема склеивания монополей Саиберга–Уиттена в 3–многообразиях включает в себе проблему асимптотического поведения монополей в 4–многобразиях с некомпактными краями $T^2 \times [0,\infty) \times \mathbf{R}$ ([CMW], [MW], [Ma] §3.3).

Уравнения Саиберга–Уиттена в $T^2 \times [0,\infty) \times \mathbf{R}$ есть нелинейная система уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} &\partial_t a - dh + *(\partial_s a - df) = *i(\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta}) \\ &\partial_t f - \partial_s h + *F_a = \tfrac{i}{2}(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \\ &\partial_t \alpha + h\alpha + i\partial_s \alpha + if\alpha + \bar{\partial}_a^* \beta = 0 \\ &\partial_t \beta + h\beta - i\partial_s \beta - if\beta + \bar{\partial}_a \alpha = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где a связность на T^2, f, h функции, $\alpha \in \Lambda^{0,0}(T^2)$, $\beta \in \Lambda^{0,1}(T^2)$, и $(s,t) \in [r_0,\infty) \times \mathbf{R}$.

Мы рассмотрим линейную систему

$$\begin{aligned} &\partial_t a - dh + *(\partial_s a - df) = 0 \\ &\partial_t f - \partial_s h + *F_a = 0 \\ &\partial_t \alpha + i\partial_s \alpha + \bar{\partial}^* \beta = 0 \\ &\partial_t \beta - i\partial_s \beta + \bar{\partial} \alpha = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

и асимптотические пределы конечно-энергетических решений в $T^2 \times (\mathbf{R}^2 - \{\underline{0}\})$, при $\|(s,t)\| \to \infty$.

УРАВНЕНИЕ АСД–СВЯЗНОСТИ

Пусть $\mathcal{A}$ будет $U(1)$–связность на $T^2 \times \mathbf{R}^2$,

$$\mathcal{A} = a(w,s,t) + f(w,s,t)ds + h(w,s,t)dt.$$

Здесь $w = (x,y)$ переменная на T^2, и $(s,t) \in \mathbf{R}^2$. Член a представляет $U(1)$–связность на T^2, и f, h функции.

Антисамодвойственная (АСД) связность $\mathcal{A}$ удовлетворяет АСД–уравнению $\mathcal{F}^+_{\mathcal{A}} = 0$. Это уравнение можно записать как систему

$$\begin{aligned} &\partial_t a - dh + *(\partial_s a - df) = 0 \\ &\partial_t f - \partial_s h + *F_a = 0, \end{aligned}$$

где F_a – кривизна связности a на T^2, и $*$ – оператор Ходжа на T^2.

После замены $z = s + it$, $z = e^{\rho + i\theta}$ и

$$a(w,\rho,\theta) = a(w, e^{\rho+i\theta})$$

$$f(w,\rho,\theta) = e^{-\rho}\cos\theta\, h(w,e^{\rho+i\theta}) - e^{-\rho}\sin\theta\, f(w,e^{\rho+i\theta})$$

$$h(w,\rho,\theta) = e^{-\rho}\cos\theta\, f(w,e^{\rho+i\theta}) + e^{-\rho}\sin\theta\, h(w,e^{\rho+i\theta}),$$

АСД уравнение дает систему

$$\begin{aligned} &\partial_\rho a - dh - *(\partial_\theta a - df) = 0 \\ &\partial_\rho f - \partial_\theta h - e^{2\rho} * F_a = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Используя калибровочное преобразование, мы можем допустить что уравнение (3) написано в радиальнои калибровке, т.е. $h \equiv 0$, если $\rho >> 0$.

Радиальние калибровочние уравнения имеют вид:

$$\partial_\rho a - *(\partial_\theta a - df) = 0 \tag{4}$$

$$\partial_\rho f - e^{2\rho} * F_a = 0. \tag{5}$$

Эта система предетавляет абелево АСД уравнение на $T^2 \times S^1 \times \mathbf{R}$, с метрикой $e^{-\rho} g_{T^2}$, где g_{T^2} стандартная метрика в плоском торе. Более того, оператор Ходжа $*$ на p–формах действует но формуле $*_\rho = (e^{-\rho})^{2-2p} *$.

АСД связность – конечноэнергетическая в $T^2 \times \Omega$, с $\Omega \subset S^1 \times \mathbf{R}$, если

$$\int_\Omega \left(\|\partial_\rho a\|^2 + e^{2\rho} \|F_a\|^2 \right) d\theta d\rho < \infty, \tag{6}$$

где $\|\cdot\|$ норма в $L^2(T^2)$, с плоской метрикой g_{T^2}.

В $T^2 \times (\mathbf{R}^2 - \{\underline{0}\})$ мы делаем замену $\alpha = e^\rho a$. Уравнения (4) (5), с $(w, \theta, \rho) \in T^2 \times S^1 \times \mathbf{R}$, дают

$$\partial_\rho \alpha = \alpha + * \partial_\theta \alpha - e^\rho * df \tag{7}$$

$$\partial_\rho f = e^\rho * d\alpha, \tag{8}$$

где $\alpha = u(w, \theta, \rho) dx + v(w, \theta, \rho) dy$. Разложение в ряд Фурье с переменными θ, x, y имеет вид:

$$u(w, \theta, \rho) = \sum u_n(\rho)_{lk} \frac{e^{in\theta}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{ilx}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{iky}}{(2\pi)^{1/2}},$$

$$v(w, \theta, \rho) = \sum v_n(\rho)_{lk} \frac{e^{in\theta}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{ilx}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{iky}}{(2\pi)^{1/2}},$$

$$f(w, \theta, \rho) = \sum f_n(\rho)_{lk} \frac{e^{in\theta}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{ilx}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{iky}}{(2\pi)^{1/2}}.$$

АСД уравнение в частных производных дает бесконечную систему обыкновенних дифференциалых уравнений. Эта система разлагается на системы

$$\frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} u_n(\rho)_{lk} \\ v_n(\rho)_{lk} \\ f_n(\rho)_{lk} \end{pmatrix} = \mathcal{Q} \begin{pmatrix} u_n(\rho)_{lk} \\ v_n(\rho)_{lk} \\ f_n(\rho)_{lk} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

с матрицами

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -in & ike^\rho \\ in & 1 & -ile^\rho \\ ike^\rho & -ile^\rho & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\mathcal{A}$ есть $U(1)$–связность, то коэффициенты удовлетворяют соотношениям:

$$u_n(\rho)_{lk} = -\overline{u_{-n}(\rho)_{-l,-k}},$$
$$v_n(\rho)_{lk} = -\overline{v_{-n}(\rho)_{-l,-k}},$$
$$f_n(\rho)_{lk} = -\overline{f_{-n}(\rho)_{-l,-k}}.$$

ЛЕММА. Если $-\overline{c_{-n,-l,-k}} = c_{nlk}$, то векторы

$$c_{nlk} \begin{pmatrix} l\ e^\rho \\ ke^\rho \\ n \end{pmatrix}, \tag{10}$$

удовлетворяют уравнениям (9). Эти решения удовелетворяют $d\alpha = 0$ в уравнении (8).

Возвращаясь к первоначальной переменной a, эти решения (4) и (5) будут постоянны в радиальном направлении.

ТЕОРЕМА. Решения уравнений (9) конечноэнергетических в $T^2 \times S^1 \times [\rho_0, \infty)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} a(w, \rho, \theta) = \quad & (u_0 + \textstyle\sum_{n \neq 0} u_n e^{-|n|\rho + in\theta} \\ & + \textstyle\sum_{n,l,k} l c_{nlk} e^{i(lx+ky+n\theta)}) dx + \\ & (v_0 + \textstyle\sum_{n \neq 0} v_n e^{-|n|\rho + in\theta} \\ & + \textstyle\sum_{n,l,k} k c_{nlk} e^{i(lx+ky+n\theta)}) dy \\ f(w, \rho, \theta) = \quad & f_0 + \textstyle\sum_{n,l,k} n c_{nlk} e^{i(lx+ky+n\theta)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Коэффициенты удовлетворяют

$$\sum_n |nu_n|^2 + \sum_{n,l,k} |(n^2+l^2+k^2)c_{nlk}|^2 < \infty,$$

$$c_{nlk} = -\overline{c_{-n,-l,-k}} \quad \text{и} \quad u_n = -\overline{u_{-n}}.$$

Эти решения стремятся к пределу

$$\begin{aligned} a_\infty(w,\theta) = \quad & (u_0 + \textstyle\sum_{n,l,k} lc_{nlk}e^{i(lx+ky+n\theta)})dx + \\ & (v_0 + \textstyle\sum_{n,l,k} kc_{nlk}e^{i(lx+ky+n\theta)})dy \\ f_\infty(w,\theta) = \quad & f_0 + \textstyle\sum_{n,l,k} nc_{nlk}e^{i(lx+ky+n\theta)}, \end{aligned}$$

в радиальной калибровке, при $\rho \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим решения типа (10), с $(k,l) \neq (0,0)$. Мы редуцируем систему: если $l \neq 0$, мы рассмотрим матрицу

$$Z = \begin{pmatrix} le^\rho & 0 & 0 \\ ke^\rho & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После замены

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} \omega \\ \nu \\ \phi \end{pmatrix},$$

новая система уравнений имеет вид

$$\frac{d}{d\rho}\begin{pmatrix} \omega \\ \nu \\ \phi \end{pmatrix} = Z^{-1}A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \nu \\ \phi \end{pmatrix},$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -in & 0 \\ in & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система разлагается на уравнение

$$\omega' = \frac{-in}{l}e^{-\rho}\nu + \frac{ik}{l}\phi$$

и систему

$$\frac{d}{d\rho}\begin{pmatrix} l\nu \\ l\phi \end{pmatrix} = \mathcal{R}\begin{pmatrix} \nu \\ \phi \end{pmatrix},$$

с матрицей

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} ink + l & -i(k^2+l^2)e^\rho \\ i(n^2e^{-\rho} - l^2e^\rho) & -ink \end{pmatrix}.$$

В области $\rho \geq \rho_0$, уравнение разлагается на старший член и член возмущения ([Ha] §X).

Старший член имеет вид

$$L_\rho = \begin{pmatrix} 0 & -i(k^2+l^2)e^\rho \\ -il^2e^\rho & 0 \end{pmatrix}$$

и возмущение:

$$P_\rho = \begin{pmatrix} ink + l & 0 \\ in^2e^{-\rho} & -ink \end{pmatrix}.$$

Невозмущенная система имеет собственные значения

$$\lambda_\pm(\rho) = \pm ie^\rho(k^2+l^2)^{1/2}$$

с собственными векторами

$$U_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pm l}{(k^2+l^2)^{1/2}} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, если мы диагонализируем матрицу, то решения имеют вид $\exp(\pm ie^\rho(k^2+l^2)^{1/2})U_\pm$. В первоначальных переменных, эти решения имеют вид

$$\begin{aligned} \nu(\rho) = \quad & \tfrac{(k^2+l^2)^{1/2}}{2l}c_1\exp(ie^\rho(k^2+l^2)^{1/2}) \\ & + \tfrac{(k^2+l^2)^{1/2}}{2l}c_2\exp(-ie^\rho(k^2+l^2)^{1/2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(\rho) = \quad & -\tfrac{1}{2}c_1\exp(ie^\rho(k^2+l^2)^{1/2}) \\ & + \tfrac{1}{2}c_2\exp(-ie^\rho(k^2+l^2)^{1/2}). \end{aligned}$$

Третье уравнение имеет решение

$$\omega(\rho) = \int_0^\rho (\frac{-in(k^2+l^2)^{1/2}}{l^2}(c_1 \exp(ie^\tau)+ c_2 \exp(-ie^\tau)) - \frac{ik}{2l}e^\tau(c_1 \exp(ie^\tau)- c_2 \exp(-ie^\tau)))d\tau.$$

Возмущенная система имеет собственные значения

$$\tilde{\lambda}_\pm(\rho) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(e^{2\rho}(k^2+l^2) - n^2 - \frac{ink}{l})}}{2}.$$

Можно диагонализировать матрицу, так что решения имеют вид

$$\exp\left(\int_0^\rho \tilde{\lambda}_\pm(\tau)d\tau\right)\tilde{U}_\pm,$$

в базице собственных векторов. При $\rho \to \infty$, эти решения $\sim e^{\rho \pm ie^\rho}$.

Собственные векторы асимптотически ρ–независимы, и стремятся к пределу $U_\pm$, где $U_\pm$ собственные векторы невозмущенной системы.

Таким образом, асимптотически, решения имеют вид

$$\nu(\rho) \sim \frac{(k^2+l^2)^{1/2}}{2l}\left(c_1 e^{\rho+ie^\rho} + c_2 e^{\rho-ie^\rho}\right)$$

$$\phi(\rho) \sim \frac{-1}{2}\left(c_1 e^{\rho+ie^\rho} - c_2 e^{\rho-ie^\rho}\right).$$

Асимптотически, третье уравнение имеет решение

$$\omega(\rho) \sim \int_0^\rho (\frac{-in(k^2+l^2)^{1/2}}{l^2}(c_1 \exp(ie^\tau) +c_2 \exp(-ie^\tau)) - \frac{ik}{2l}e^\tau(c_1 \exp(ie^\tau) -c_2 \exp(-ie^\tau)))d\tau.$$

В первоначальных переменных, эти решения имеют вид

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} le^\rho\omega(\rho) \\ ke^\rho\omega(\rho) + \nu(\rho) \\ n\omega(\rho) + \phi(\rho) \end{pmatrix}.$$

Если $l = 0$ и $k \neq 0$, мы рассмотрим матрицу

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ ke^\rho & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После замены

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ f \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} \omega \\ \nu \\ \phi \end{pmatrix},$$

новая система

$$\frac{d}{d\rho}\begin{pmatrix} \omega \\ \nu \\ \phi \end{pmatrix} = Z^{-1}A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ \nu \\ \phi \end{pmatrix}$$

дает уравнение

$$\omega' = \frac{in}{k}e^{-\rho}\nu$$

и системы

$$\frac{d}{d\rho}\begin{pmatrix} \nu \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ike^\rho \\ \frac{-in^2}{k}e^{-\rho} + ike^\rho & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu \\ \phi \end{pmatrix}.$$

Эта система разлагается на старший член

$$L_\rho = \begin{pmatrix} 0 & ike^\rho \\ ike^\rho & 0 \end{pmatrix}$$

и возмущение

$$P_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-in^2}{k}e^{-\rho} & 0 \end{pmatrix}.$$

Невозмущенная система имеет собственные значения $\lambda_\pm = \pm ike^\rho$ и ρ–независимые собственные векторы

$$U_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Возмущенная система имеет собственные значения

$$\tilde{\lambda}_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(k^2 e^{2\rho} - n^2)}}{2}.$$

Асимптотически, решения имеют вид $\exp(\rho \pm ike^{\rho})$, с собственными векторами, которые стремятся к пределу $U_{\pm}$, при $\rho \to \infty$.

Таким образом, асимптотически, решения имеют вид

$$\omega(\rho) \sim \frac{in}{2k} \int_0^{\rho} (c_1 e^{+ike^{\tau}} + c_2 e^{-ike^{\tau}}) d\tau,$$

$$\nu(\rho) \sim \frac{1}{2}(c_1 e^{\rho + ike^{\rho}} + c_2 e^{\rho - ike^{\rho}})$$

$$\phi(\rho) \sim \frac{1}{2}(c_1 e^{\rho + ike^{\rho}} - c_2 e^{\rho - ike^{\rho}}).$$

В первоначальных переменных, конечно-энергетические решения имеют вид

$$\begin{aligned} a(w,\rho,\theta) = \quad & (u_0 + \textstyle\sum_{n,l,k} l c_{nlk} e^{i(lx+ky+n\theta)}) dx + \\ & (v_0 + \textstyle\sum_{n,l,k} k c_{nlk} e^{i(lx+ky+n\theta)}) dy \\ f(w,\rho,\theta) = \quad & f_0 + \textstyle\sum_{n,l,k} n c_{nlk} e^{i(lx+ky+n\theta)}. \end{aligned}$$

Если $(k,l) = (0,0)$ в векторе (10), то решения имеют вид

$$\begin{pmatrix} c_1(n,0,0)e^{(1+n)t} - ic_2(n,0,0)e^{(1-n)t} \\ c_1(n,0,0)e^{(1+n)t} + ic_2(n,0,0)e^{(1-n)t} \\ c_3(n,0,0) \end{pmatrix}.$$

Эти векторы получены, решением системы с постоянным коэффицентами с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -in & 0 \\ in & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В первоначальных переменных, эти решения системы (4) и (5) имеют вид

$$\begin{aligned} a(w,\rho,\theta) = \quad & \left(u_0 + \textstyle\sum_{n\neq 0} u_n e^{-|n|\rho + in\theta}\right) dx \\ & + \left(v_0 + \textstyle\sum_{n\neq 0} v_n e^{-|n|\rho + in\theta}\right) dy \\ f(w,\rho,\theta) = \quad & f_0. \end{aligned}$$

Эти решения удовлетворят $df = 0$ и $d\alpha = 0$ в уравнениях (7) и (8).

СЛЕДСТВИЕ. Решение уравнения (9) конечноэнергетическое в $T^2 \times S^1 \times \mathbf{R}$ является плоской связностью на T^2 постоянной на $\mathbf{R} \times S^1$. Это решение имеет устранимую особенность, при $\rho \to -\infty$.

СЛЕДСТВИЕ. Решения АСД уравнения конечноэнергетические в $T^2 \times S^1 \times [\rho_0, \infty)$ стремятся экспоненциально в радиальном направлении к пределу $a_\infty(\theta)$. Этот предел является семейством плоских связностей на T^2. Для каждого $\theta \in S^1$, связности $a_\infty(\theta)$ принадлежат одному калибровочному классу

$$a_\infty = [a_\infty(\theta)] = [\lambda(\theta) \cdot a_0],$$

где $\lambda(\theta)$ калибровочное преобразование.

Доказательство. Функцию $f_\infty - f_0$ можно записать

$$f_\infty - f_0 = -i\frac{d}{d\theta} \sum_{n,l,k} c_{nlk} e^{i(lx+ky+n\theta)}.$$

Положим

$$\gamma(\theta) := \sum_{l,k} -ic_{nlk} e^{i(lx+ky+n\theta)},$$

$$a_0 := u_0 dx + v_0 dy.$$

Плоская связность a_∞ удовлетворяет

$$a_\infty - (u_0 dx + v_0 dy) = id\gamma(\theta).$$

Для всех $\theta \in S^1$, $\lambda(\theta) : T^2 \to U(1)$ является семейством калибровочных преобразований $\lambda(\theta) = \exp(i\gamma(\theta))$, для калибровочной группы действующей по формуле:

$$\lambda \cdot a_0 := a_0 + \lambda^{-1} d_{T^2} \lambda$$

где $\lambda^{-1}d_{T^2}\lambda = id_{T^2}\gamma$.

УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

Спинор $\Psi = (\alpha,\beta)$ на $T^2\times\mathbf{R}^2$ имеет компоненты $\alpha(s,t)\in\Lambda^{0,0}(T^2)$, $\beta(s,t)\in\Lambda^{0,1}(T^2)$, с стандартной комплексной структурой на T^2. Мы делаем замену $z = s+it = e^{\rho+i\theta}$ и

$$\begin{aligned}\alpha(w,\rho,\theta) &:= \alpha(w,e^{\rho+i\theta})\\ \beta(w,\rho,\theta) &:= \beta(w,e^{\rho+i\theta}).\end{aligned}\tag{12}$$

Новая система уравнений Дирака имеет вид

$$\begin{aligned}\partial_\rho\alpha &= i(\partial_\theta\alpha + e^{\rho+i\theta}\bar\partial^*\beta)\\ \partial_\rho\beta &= -i(\partial_\theta\beta + e^{\rho-i\theta}\bar\partial\alpha).\end{aligned}\tag{13}$$

Решение будет конечноэнергетическим в $\Omega\subset S^1\times\mathbf{R}$ если оно принадлежит $L^2(T^2\times\Omega)$.

Разложение в ряд Фурые по переменным $w\in T^2$ и $\theta\in S^1$ дает систему

$$\begin{aligned}\alpha'_{nlk} &= ie^\rho\tfrac{1}{2}(il-k)\bar\beta_{-n-1\ -l\ -k} - n\alpha_{nlk}\\ \beta'_{nlk} &= -ie^\rho(il-k)\alpha_{n+1\ lk} + n\beta_{nlk},\end{aligned}\tag{14}$$

В области $\rho\geq\rho_0$, мы ищем старший член и член возмущения. Старший член дает систему

$$\begin{aligned}\alpha'_{nlk} &= ie^\rho\tfrac{1}{2}(il-k)\bar\beta_{-n-1\ -l\ -k}\\ \beta'_{nlk} &= -ie^\rho(il-k)\alpha_{n+1\ lk},\end{aligned}\tag{15}$$

и возмущение имеет вид

$$\begin{pmatrix}-n & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{nlk}\\ \beta_{nlk}\end{pmatrix}.\tag{16}$$

Полачая $\alpha_{nlk} = \eta_{nlk} + i\xi_{nlk}$ и $\beta_{nlk} = p_{nlk} + iq_{nlk}$, бесконечная система (15) обыкновенних дифференциальих уравнений разлагается на систему восьми уравнений

$$\begin{aligned}p'_{nlk} &= e^\rho(l\eta_{n+1\ lk} - k\xi_{n+1\ lk})\\ q'_{nlk} &= e^\rho(l\xi_{n+1\ lk} + k\eta_{n+1\ lk})\\ \eta'_{n+1\ lk} &= \tfrac{e^\rho}{2}(-lp_{-n-2\ -l\ -k} - kq_{-n-2\ -l\ -k})\\ \xi'_{n+1\ lk} &= \tfrac{e^\rho}{2}(lp_{-n-2\ -l\ -k} - kq_{-n-2\ -l\ -k})\\ p'_{-n-2\ -l\ -k} &= e^\rho(-l\eta_{-n-1\ -l\ -k} + k\xi_{-n-1\ -l\ -k})\\ q'_{-n-2\ -l\ -k} &= e^\rho(-l\eta_{-n-1\ -l\ -k} - k\xi_{-n-1\ -l\ -k})\\ \eta'_{-n-1\ -l\ -k} &= \tfrac{e^\rho}{2}(lp_{nlk} + kq_{nlk})\\ \xi'_{-n-1\ -l\ -k} &= \tfrac{e^\rho}{2}(-lp_{nlk} + kq_{nlk})\end{aligned}$$

После замены $\tau = e^\rho$, получается автономная линейная система с 8×8 матрицей

$$M = \begin{pmatrix}0 & A & 0 & 0\\ 0 & 0 & B & 0\\ 0 & 0 & 0 & -A\\ -B & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix}l & -k\\ l & k\end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-l & -k\\ l & -k\end{pmatrix}.$$

С обозначениями $\eta_0 = (k^2+6kl+l^2)^{1/2}$, $\eta_1 = k-l$, $\eta_2 = k+l$, собственные значения системы $\pm\lambda_i^{nlk}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda_1^{nlk} &= \tfrac{1}{2}(\eta_2^2+\eta_1\eta_0)^{1/2}\\ \lambda_2^{nlk} &= \tfrac{1}{2}(\eta_2^2-\eta_1\eta_0)^{1/2}\\ \lambda_3^{nlk} &= \tfrac{1}{2}(-\eta_2^2-\eta_1\eta_0)^{1/2}\\ \lambda_4^{nlk} &= \tfrac{1}{2}(-\eta_2^2+\eta_1\eta_0)^{1/2}.\end{aligned}$$

В базице собственных векторов $U_i^\pm(nlk)$, конечноэнергетические решения имеют вид

$$\sum_{i=1}^{2} c_i^{nlk}\exp(-|\lambda_i^{nlk}|\tau)U_i^-(nlk).$$

Возмущенная система (16) с переменным $\alpha_{nlk} = \eta_{nlk} + i\xi_{nlk}$, $\beta_{nlk} = p_{nlk} + iq_{nlk}$, является неавтономной системой с матрицей

$$\begin{pmatrix} nI & e^{\rho}A & 0 & 0 \\ 0 & -(n+1)I & e^{\rho}B & 0 \\ 0 & 0 & -(n+2)I & -e^{\rho}A \\ -e^{\rho}B & 0 & 0 & (n+1)I \end{pmatrix}.$$

Замечание. Конечноэнергетические решения системы

$$\partial_\rho a = *(\partial_\theta a - df)$$
$$\partial_\rho f = e^{2\rho} * F_a$$
$$\partial_\rho \alpha = i(\partial_\theta \alpha + e^{\rho+i\theta}\bar{\partial}^* \beta)$$
$$\partial_\rho \beta = -i(\partial_\theta \beta + e^{\rho-i\theta}\bar{\partial}\alpha)$$

в $T^2 \times S^1 \times [\rho_0, \infty)$ дают конечно энергетические решения системи (2) в $T^2 \times [r_0, \infty) \times \mathbf{R}$.

Мы думаем что можно рассматривать проблему асимптотического поведения монополей (1) в $T^2 \times [r_0, \infty) \times \mathbf{R}$ используя процесс итерации. После замены переменных, в радиальной калибровке система (1) имеет вид

$$\partial_\rho a = *(\partial_\theta a - df + i(\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta}))$$
$$\partial_\rho f = e^{2\rho} * (F_a + \tfrac{i}{2}(|\alpha|^2 - |\beta|^2)\omega)$$
$$\partial_\rho \alpha = i(\partial_\theta \alpha + f\alpha + e^{\rho+i\theta}\bar{\partial}_a^* \beta)$$
$$\partial_\rho \beta = -i(\partial_\theta \beta + f\beta + e^{\rho-i\theta}\bar{\partial}_a \alpha).$$

В следующей статье мы рассмотрим решение линейной системы, $\Xi_0 = (u_0, v_0, f_0, \alpha_0, \beta_0)$, и возмущение

$$\begin{aligned}
u'_{nlk} = \;& -inv_{nlk} + ikf_{nlk} + 2iRe(\bar{\alpha}_0\beta)_{nlk} \\
& +2iRe(\bar{\alpha}\beta_0)_{nlk} \\
v'_{nlk} = \;& inu_{nlk} - ilf_{nlk} + 2iIm(\bar{\alpha}_0\beta)_{nlk} \\
& +2iIm(\bar{\alpha}\beta_0)_{nlk} \\
f'_{nlk} = \;& ike^{2\rho}u_{nlk} - ile^{2\rho}v_{nlk} \\
& +2e^{2\rho}(Re(\bar{\alpha}_0\alpha)_{nlk} - (\bar{\beta}_0\beta)_{nlk}) \\
\alpha'_{nlk} = \;& -n\alpha_{nlk} + ie^{\rho}\tfrac{1}{2}(il-k)\bar{\beta}_{-n-1\ -l\ -k} \\
& +ie^{\rho}\tfrac{1}{2}(a_0\bar{\beta})_{nlk} + ie^{\rho}\tfrac{1}{2}(a\bar{\beta}_0)_{nlk} + \\
& i(f_0\alpha)_{nlk} + i(f\alpha_0) \\
\beta'_{nlk} = \;& n\beta_{nlk} - ie^{\rho}(il-k)\alpha_{n+1\ lk} - ie^{\rho}(a_0\alpha)_{nlk} \\
& -ie^{\rho}(a\alpha_0)_{nlk} - i(f_0\beta)_{nlk} - i(f\beta_0),
\end{aligned}$$

с матрицей L_{Ξ_0}, и процесс итерации $\Xi'_{\nu+1} = L_{\Xi_\nu}\Xi_{\nu+1}$, с начальным условим $\Xi_{\nu+1}(0) = \Xi_\nu(0)$.

ЛИТЕРАТУРА

[CMW] A. Carey, M. Marcolli, B.L. Wang, *Exact triangles in Seiberg–Witten–Floer theory*, preprint, math.DG/9907065

[Ha] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, Birkhäuser 1982.

[MW] M. Marcolli, B.L. Wang, *Equivariant Seiberg–Witten Floer homology*, preprint, dg-ga/9606003.

[Ma] M. Marcolli, *Seiberg–Witten gauge theory*, Hindustan Book Agency, 1999.

Matilde Marcolli, Max–Planck–Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, Bonn D-53111, Germany. marcolli@mpim-bonn.mpg.de